L'addition du cancre et son utilisation pour approximer un réel

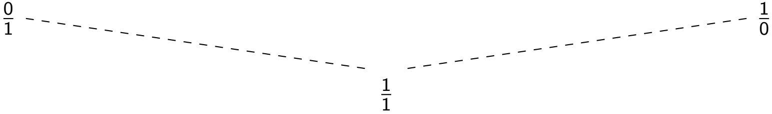
Xavier Provençal

Séminaire du SEG
Jeudi le 24 janvier 2019, Montréal

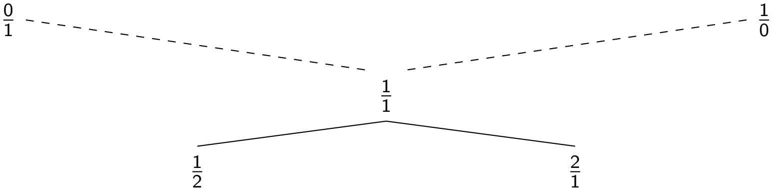
Arbre de Stern-Brocot

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{0}$

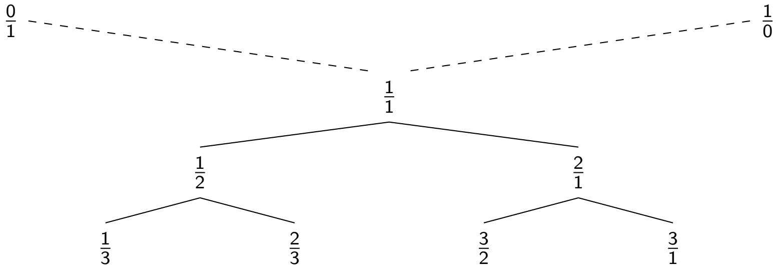
Arbre de Stern-Brocot



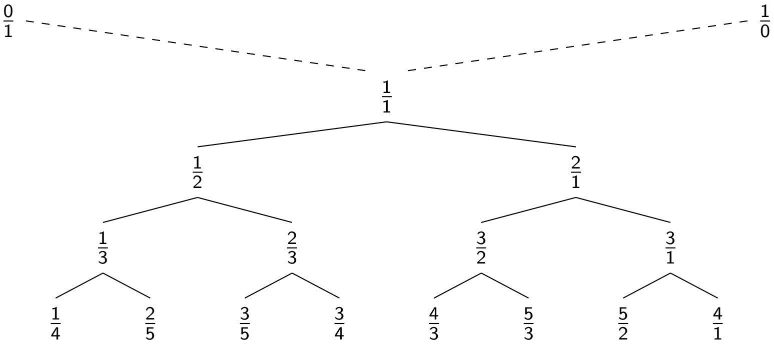
Arbre de Stern-Brocot



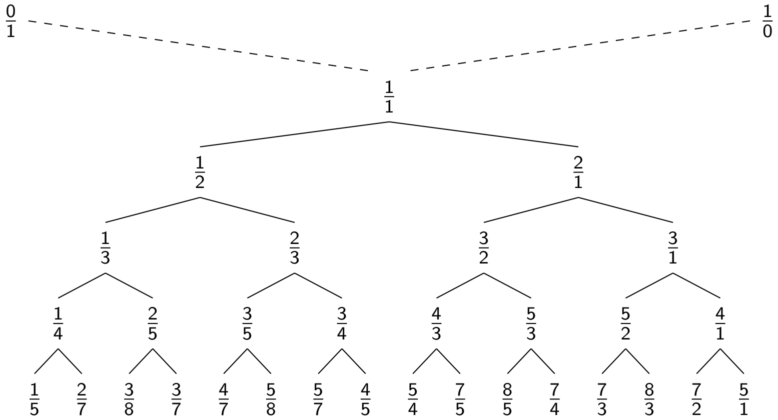
Arbre de Stern-Brocot



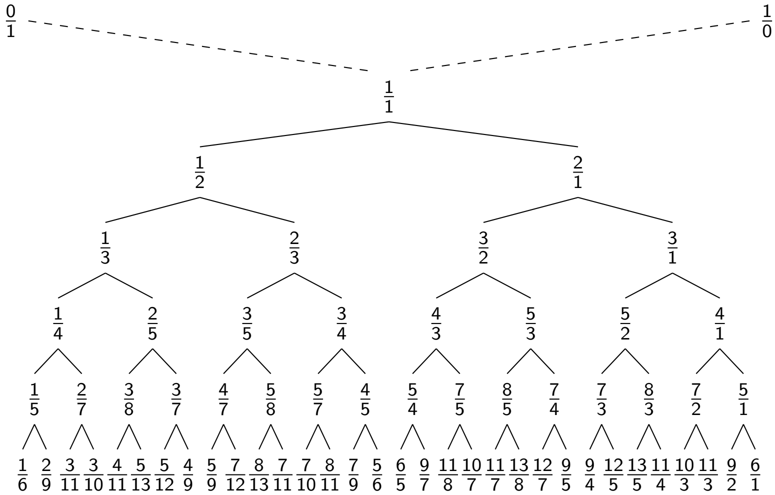
Arbre de Stern-Brocot



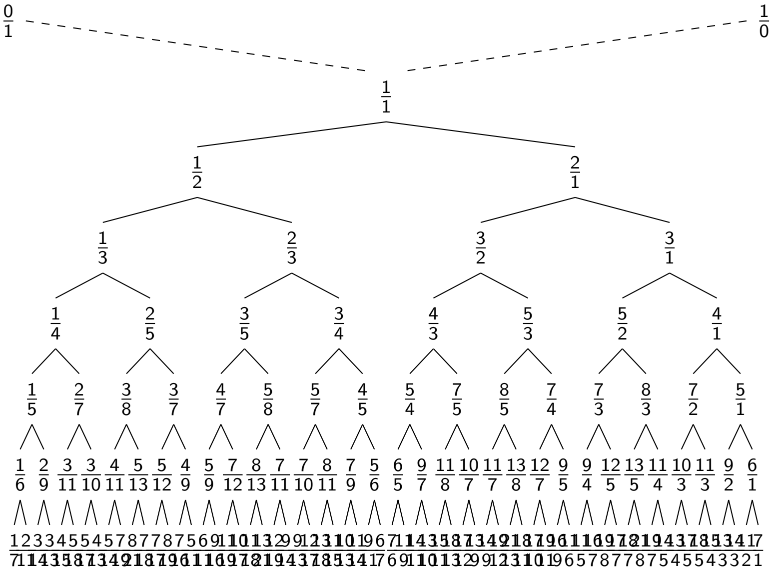
Arbre de Stern-Brocot



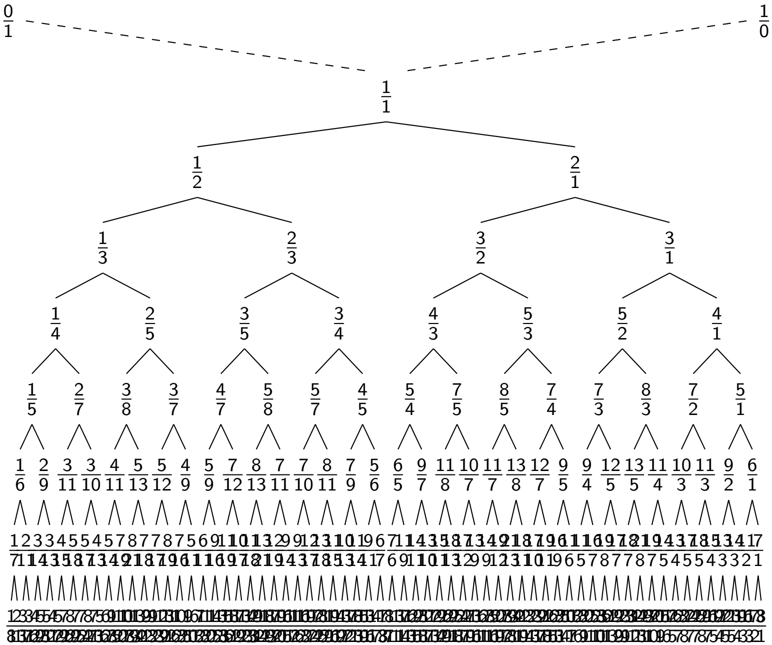
Arbre de Stern-Brocot



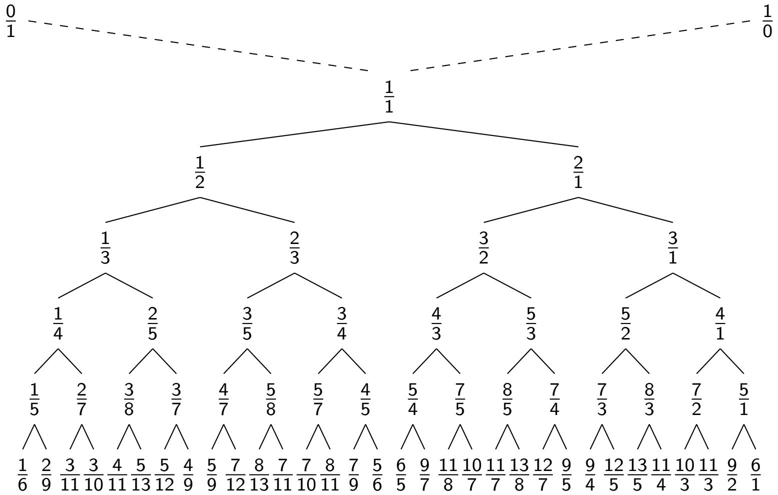
Arbre de Stern-Brocot



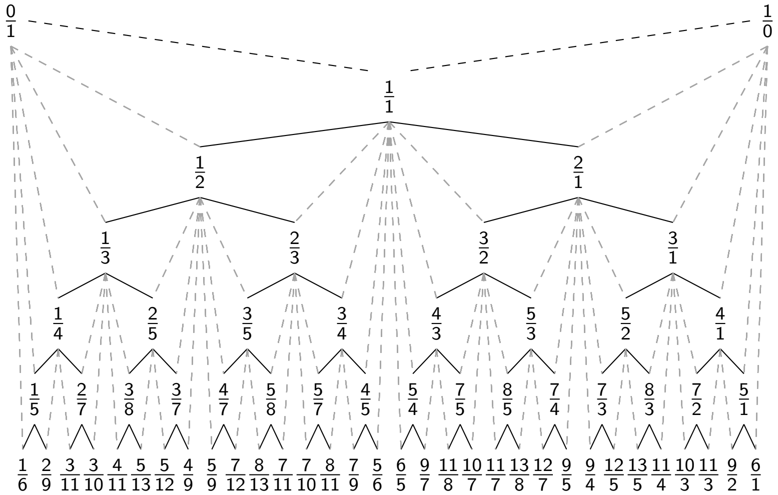
Arbre de Stern-Brocot



Arbre de Stern-Brocot



Arbre de Stern-Brocot

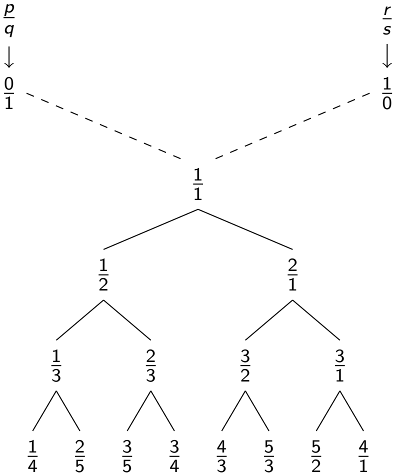


Recherche d'une fraction $\frac{a}{b}$ dans l'arbre de Stern-Brocot.

$$\frac{p}{q} := \frac{0}{1}, \qquad \frac{r}{s} := \frac{1}{0}$$

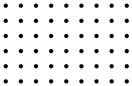
tant que $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ **faire**

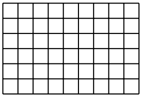
- **si** $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ **alors**
  - $\frac{r}{s} := \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$
- **si** $\frac{a}{b} > \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ **alors**
  - $\frac{p}{q} := \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$



Géométrie discrète

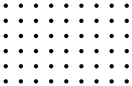
- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

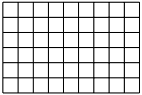




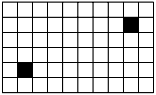
Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :





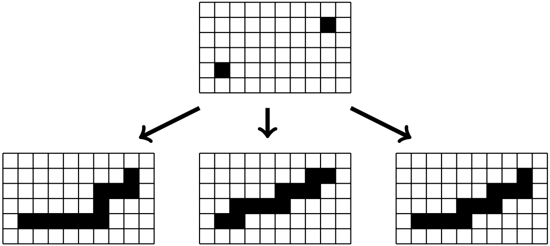
- Le cas des droites



Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

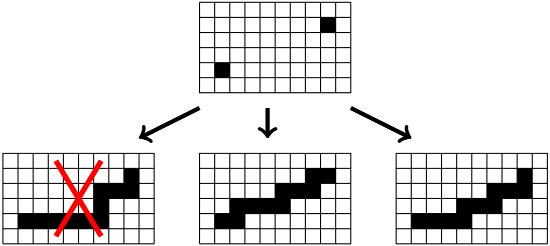
- Le cas des droites



Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

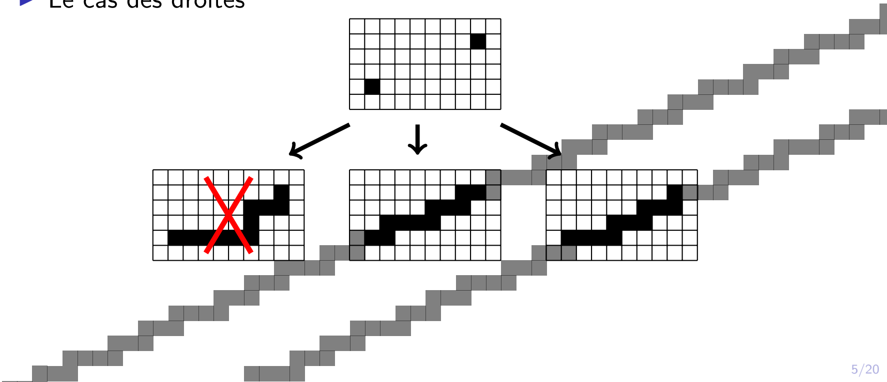
- Le cas des droites



Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

- Le cas des droites

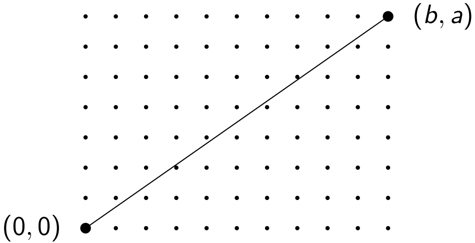


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

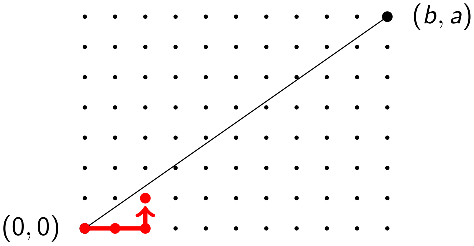


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

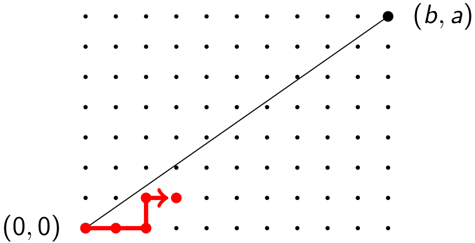


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

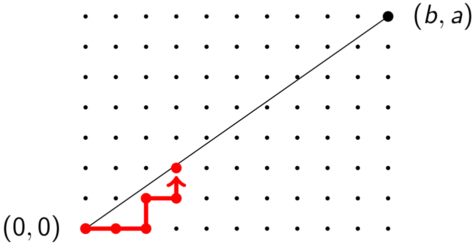


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

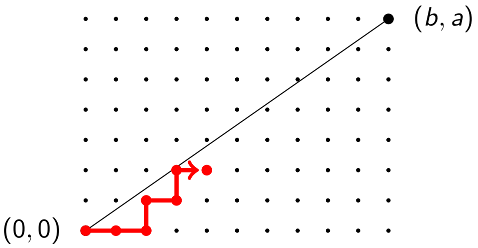


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0, 0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0, 0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

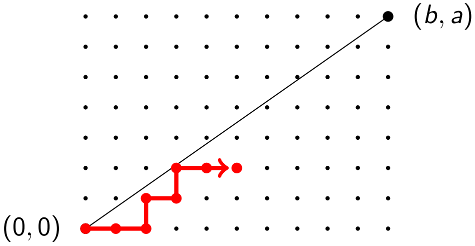


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

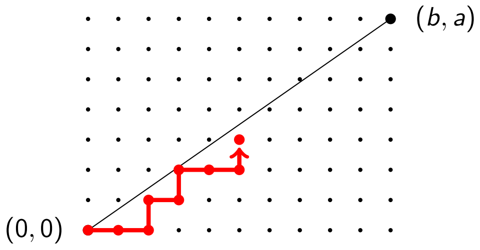


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

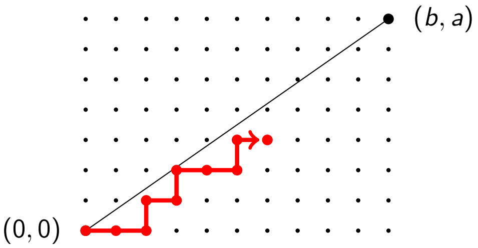


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0, 0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0, 0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

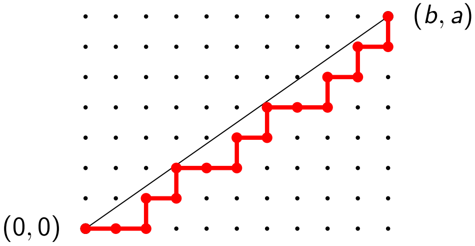


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

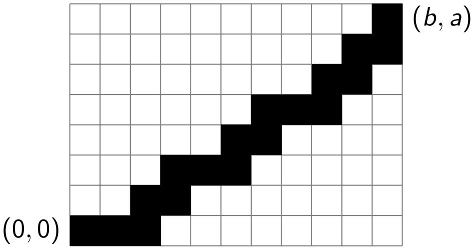


SDDS

Definition

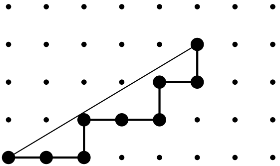
Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segement de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

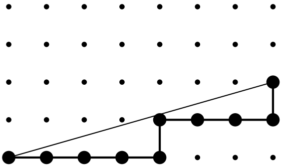


Composition de SDDS

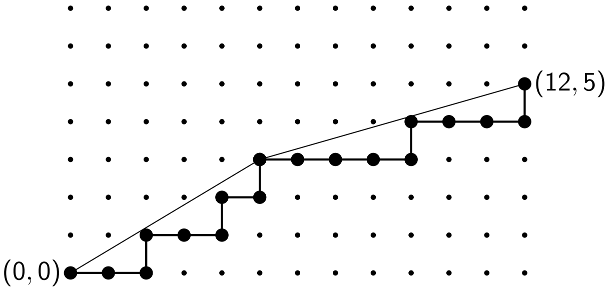
SDDS de pente 3/5



SDDS de pente 2/7

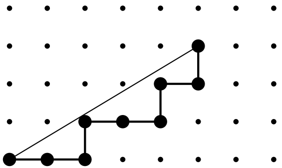


Compisition des deux SDDS

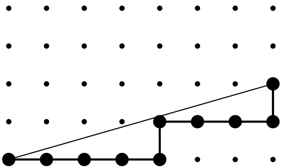


Composition de SDDS

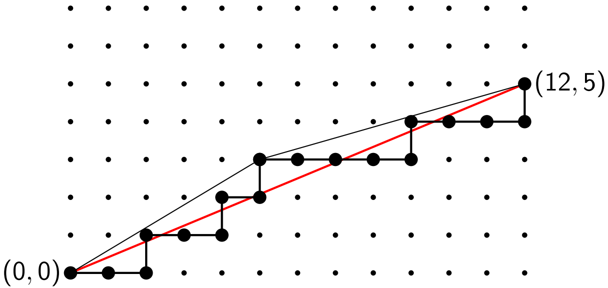
SDDS de pente 3/5



SDDS de pente 2/7

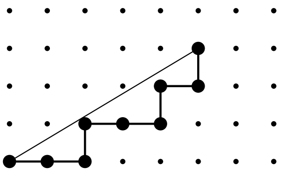


Compisition des deux SDDS

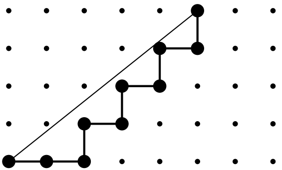


Composition de SDDS

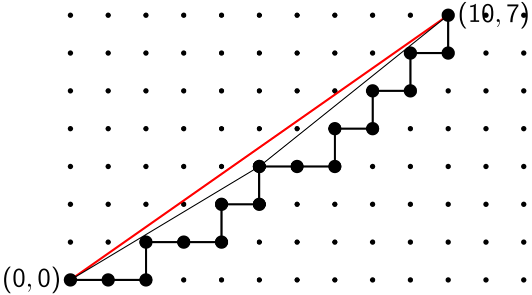
SDDS de pente 3/5



SDDS de pente 4/5

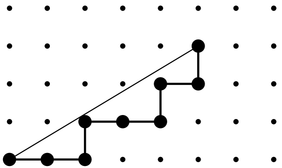


Compisition des deux SDDS

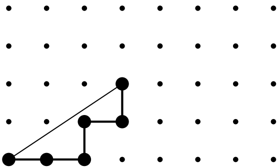


Composition de SDDS

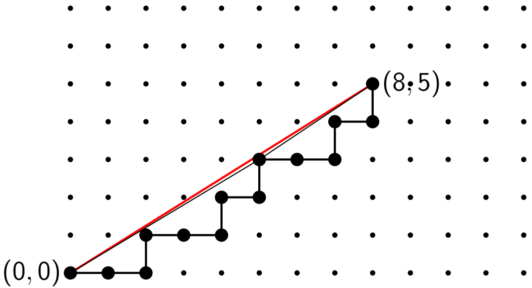
SDDS de pente 3/5



SDDS de pente 2/3



Compisition des deux SDDS

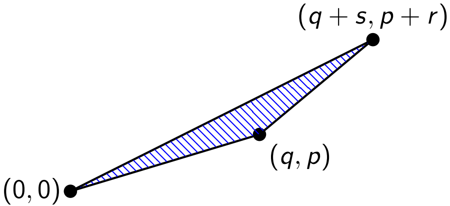


Composition de SDDS

Théorème

*La composition des SDDS de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ est le SDDS de pente $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ si les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont **consécutives**.*

Théorème de Pick

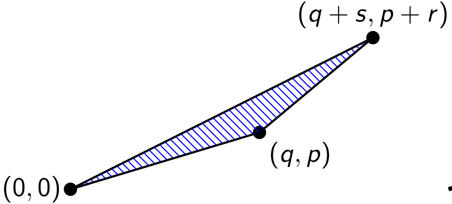


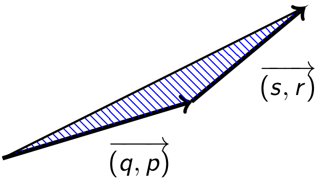
Composition de SDDS

Théorème

La composition des SDDS de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ est le SDDS de pente $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ si les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont ***consécutives****.*

Théorème de Pick



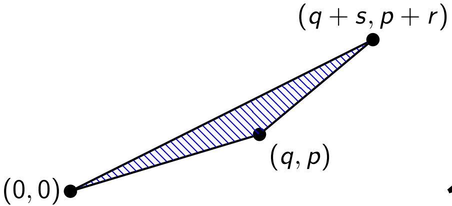


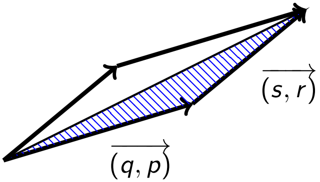
Composition de SDDS

Théorème

La composition des SDDS de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ est le SDDS de pente $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ si les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont ***consécutives****.*

Théorème de Pick





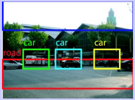
$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

Analyse d'image

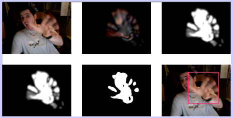
Definition (Wikipedia)

«**Image analysis** is the extraction of meaningful information from images; mainly from digital images by means of digital image processing techniques.»

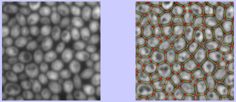
Object recognition



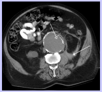
Motion detection/tracking



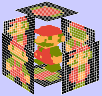
Segmentation



Medical imaging



3D reconstruction

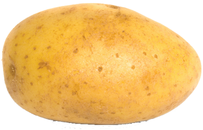


Optical character recognition

OCR

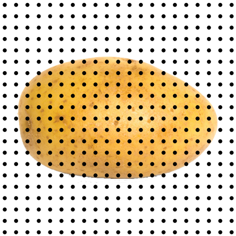
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



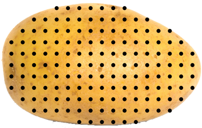
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



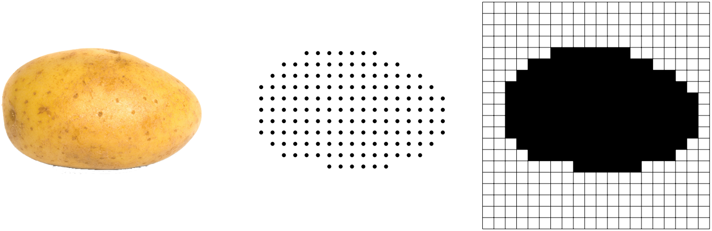
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



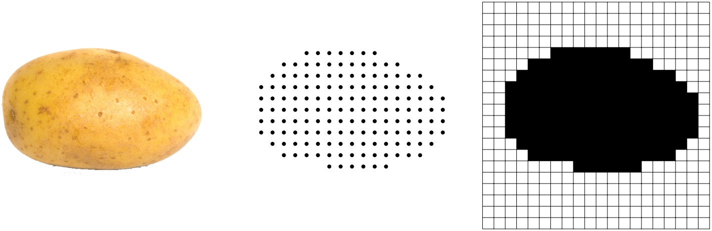
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

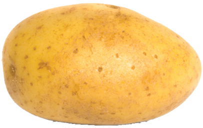


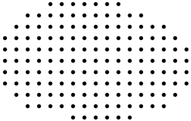
Étant donné $\mathrm{Disc}(P)$, que peut-on dire de P ?

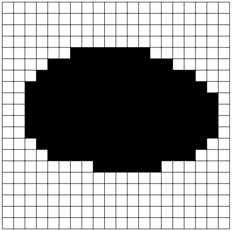
- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- ...

Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

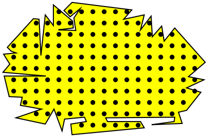




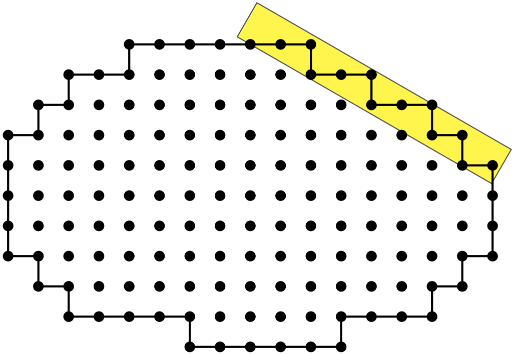


Étant donné $\mathrm{Disc}(P)$, que peut-on dire de P ?

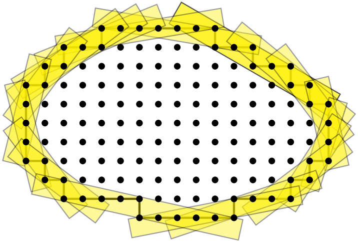
- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- ...



SDD maximaux sur bord d'une forme discrète



Tangential cover



Definition ([Feschet, Tougne 99])

The tangential cover of a discrete shape is the sequence of all maximal DSS on its boundary.

Théorème ([Debled-Rennesson, Reveilles 1995][Lachaud, Vialard, de Vieilleville 2007])

The computation of the tangential cover take a time in $\mathcal{O}(n)$ where n is the number of points on the boundary of the shape.

Applications of the tangential cover include :

- Convexity test [Debled-Rennesson, Reiter-Doerksen 04]
- Tangent estimation [Feschet, Tougne 99], [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Length estimation [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Curvature estimation [Lachaud, Kerautret, Naegel 08]
- Automatic noise detection [Lachaud, Kerautret 12]

Approximation d'un irrationnel

Definition

La fraction $\frac{p}{q}$ est une **bonne approximation** de l'irrationnel x si pour toute fraction $\frac{r}{s}$ avec $s < q$:

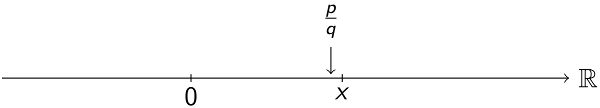
$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \left|\frac{r}{s} - x\right|.$$

Remarque : en général, pour un dénominateur q fixé, il n'existe pas de bonne approximation.

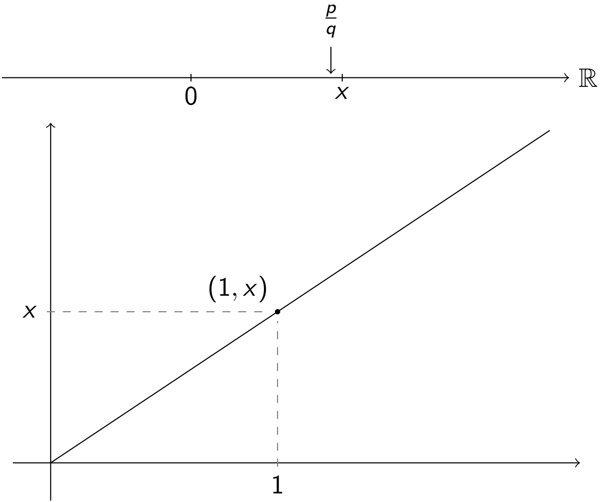
Les **bonnes** approximations de π sont :

$$\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}, \frac{333}{106}, \frac{335}{113}, \frac{52163}{16604}, \ldots$$

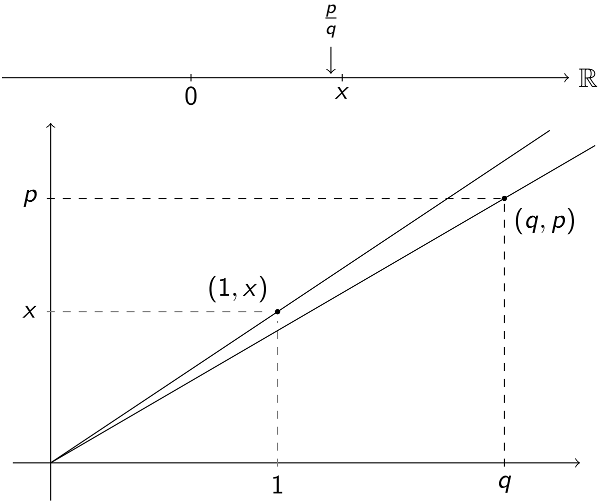
Approximation d'un irrationnel



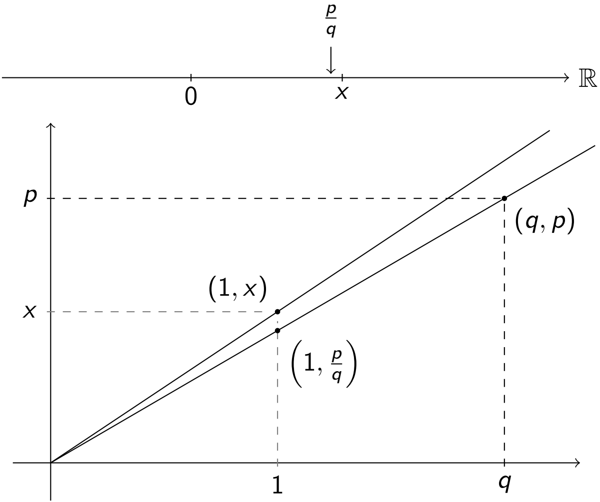
Approximation d'un irrationnel



Approximation d'un irrationnel

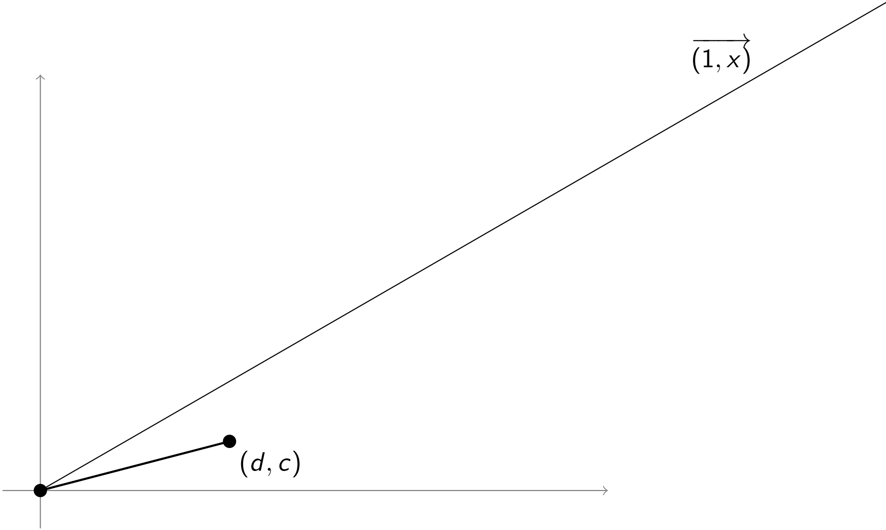


Approximation d'un irrationnel

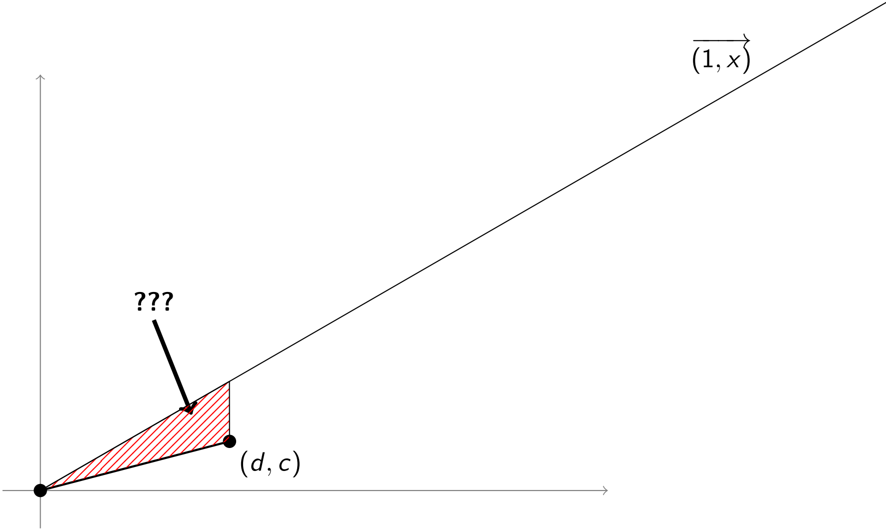


Plus l'approximation angulaire en bonne, plus la fraction est bonne et vice-versa.

Approximations *par en dessous*

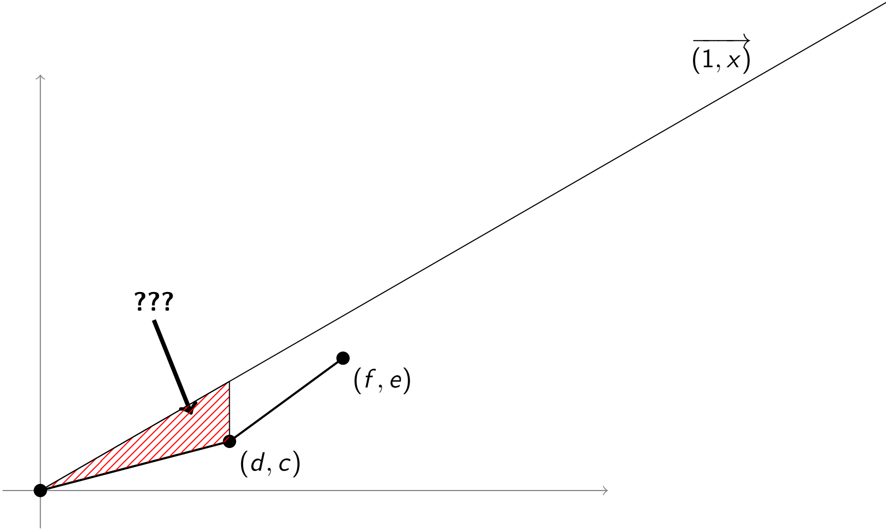


Approximations *par en dessous*



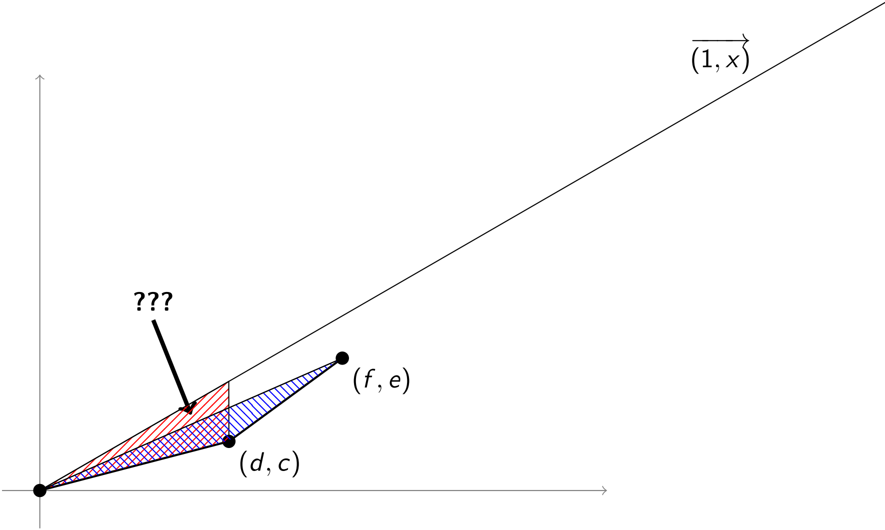
$\frac{c}{d}$ est une *bonne approximation* ssi il n'y a pas de point entier dans

Approximations *par en dessous*



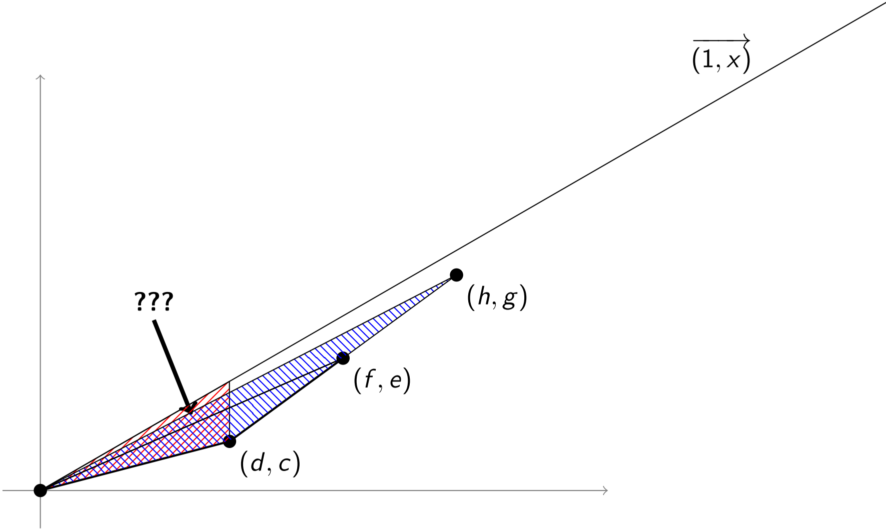
$\frac{c}{d}$ est une *bonne approximation* ssi il n'y a pas de point entier dans

Approximations *par en dessous*



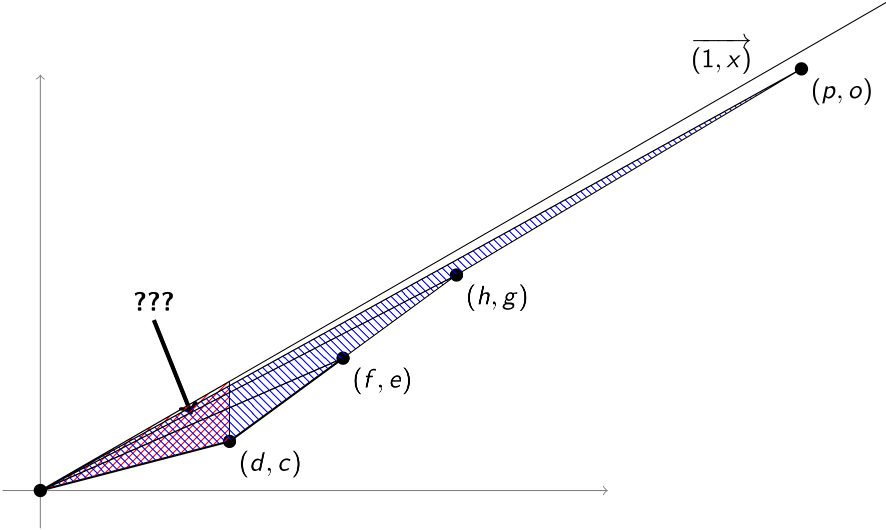
$\frac{c}{d}$ est une *bonne approximation* ssi il n'y a pas de point entier dans

Approximations *par en dessous*



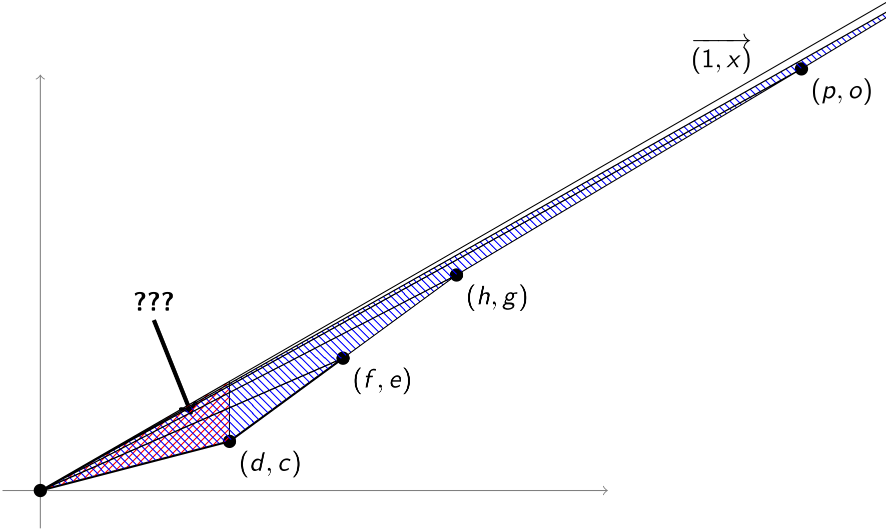
$\frac{c}{d}$ est une *bonne approximation* ssi il n'y a pas de point entier dans

Approximations *par en dessous*



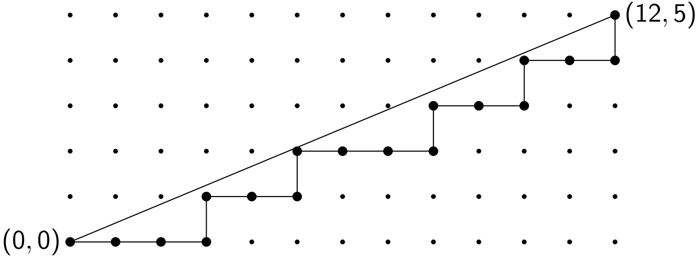
$\frac{c}{d}$ est une *bonne approximation* ssi il n'y a pas de point entier dans

Approximations *par en dessous*

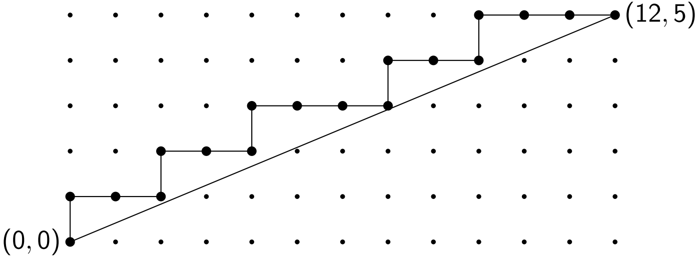


$\frac{c}{d}$ est une *bonne approximation* ssi il n'y a pas de point entier dans

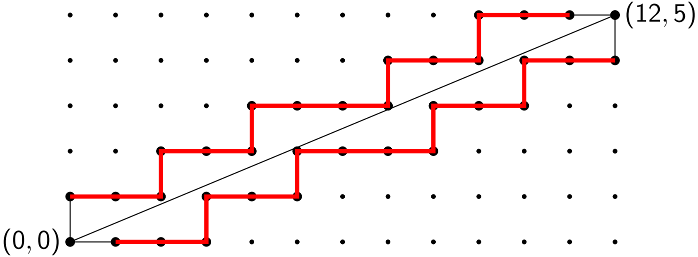
Apprimations *par dessus*



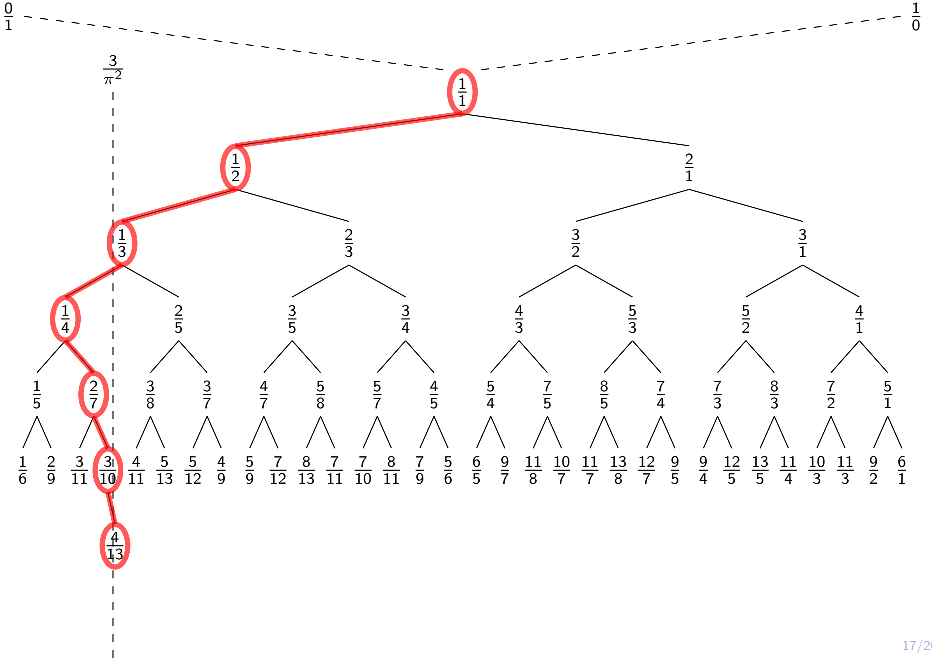
Apprimations *par dessus*



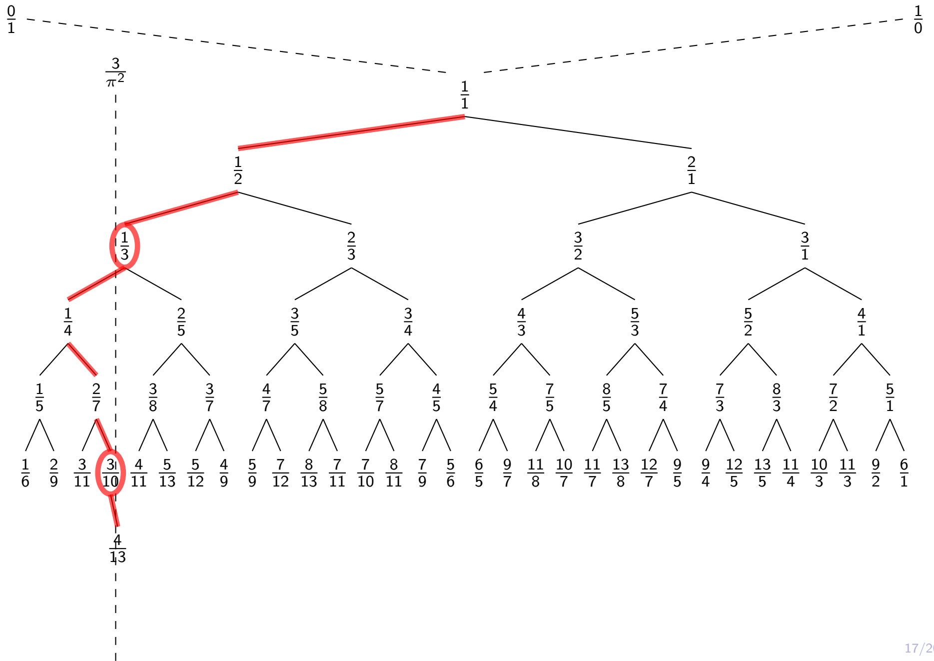
Apprimations *par dessus*



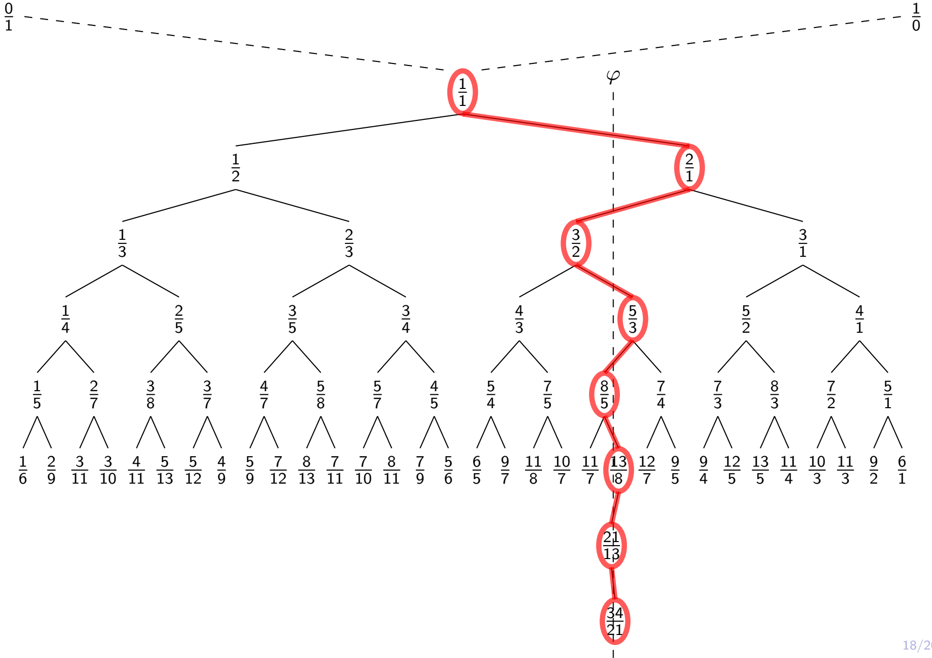
Approximation d'un réel



Approximation d'un réel



Approximation d'un réel



Fin

Fin