L'addition du cancre et son utilisation pour approximer un réel

Xavier Provençal

Séminaire MATH-S-LO
2 mars 2022, Cégep Saint-Laurent, Montréal

Approximer un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $[q_0, q_1, q_2, \dots]$ telle que $\lim_{n \to \infty} q_n = x$.

Approximer un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $[q_0, q_1, q_2, \dots]$ telle que $\lim_{n \to \infty} q_n = x$.

Par exemple :

$$\pi \quad \approx \quad 3.14159\dots$$

Approximer un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $[q_0, q_1, q_2, \ldots]$ telle que $\lim_{n \to \infty} q_n = x$.

Par exemple :

$$
\begin{aligned}
\pi &\approx 3.14159\ldots \\
\pi &\approx \tfrac{3}{1} \\
\pi &\approx \tfrac{31}{10} \\
\pi &\approx \tfrac{314}{100} \\
\pi &\approx \tfrac{3141}{1000} \\
\pi &\approx \tfrac{31415}{10000} \\
\pi &\approx \tfrac{314159}{100000} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Étant donné $q, s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$p = \operatorname{argmin} \left\{ \left| \frac{p}{q} - x \right| \;;\; p \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$s = \operatorname{argmin} \left\{ \left| \frac{r}{s} - x \right| \;;\; r \in \mathbb{Z} \right\}$$

Il est faux que si $q > s$ alors $\left| \frac{p}{q} - x \right| < \left| \frac{r}{s} - x \right|$

Étant donné $q, s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$p = \operatorname{argmin}\left\{\left|\frac{p}{q} - x\right| \ ; \ p \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$s = \operatorname{argmin}\left\{\left|\frac{r}{s} - x\right| \ ; \ r \in \mathbb{Z}\right\}$$

Il est faux que si $q > s$ alors $\left|\frac{p}{q} - x\right| < \left|\frac{r}{s} - x\right|$

La fraction avec le plus petit dénominateur qui permet d'approximer π mieux que $\frac{22}{7}$ est $\frac{179}{57}$.

La fraction avec le plus petit dénominateur qui permet d'approximer π mieux que $\frac{355}{113}$ est $\frac{52163}{16604}$.

Définition

*Une fraction $\frac{p}{q}$ est une **bonne approximation** de $x \in \mathbb{R}$ si*

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \min\left\{\left|\frac{r}{s} - x\right| ; r, s \in \mathbb{Z}, 0 < s < q\right\}.$$

De manière analogue, on définit une **bonne sous-approximation** et une **bonne sur-approximation**.

Définition (Addition du cancre)

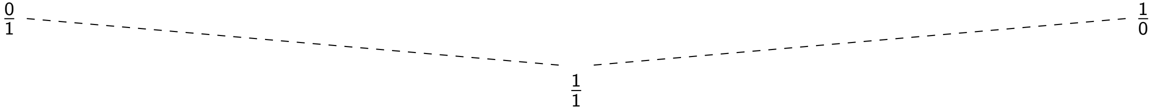
Étant données deux fractions réduites $\frac{p}{q}$ *et* $\frac{r}{s}$*, on définit* $\oplus$ *par :*

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$$

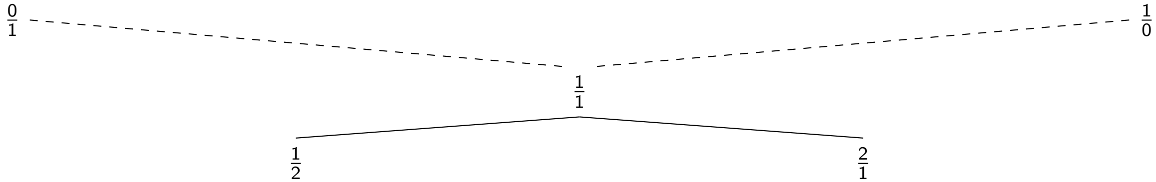
Arbre de Stern-Brocot

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{0}$

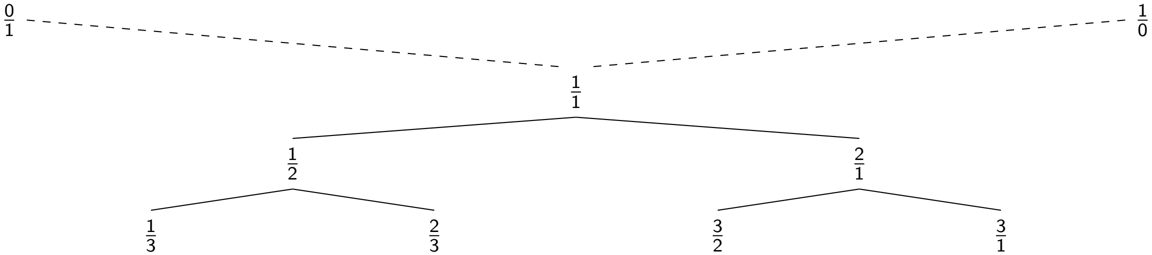
Arbre de Stern-Brocot



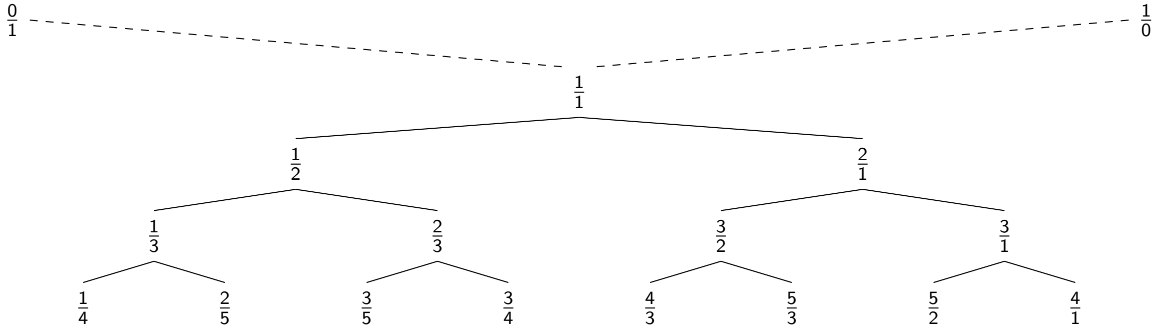
Arbre de Stern-Brocot



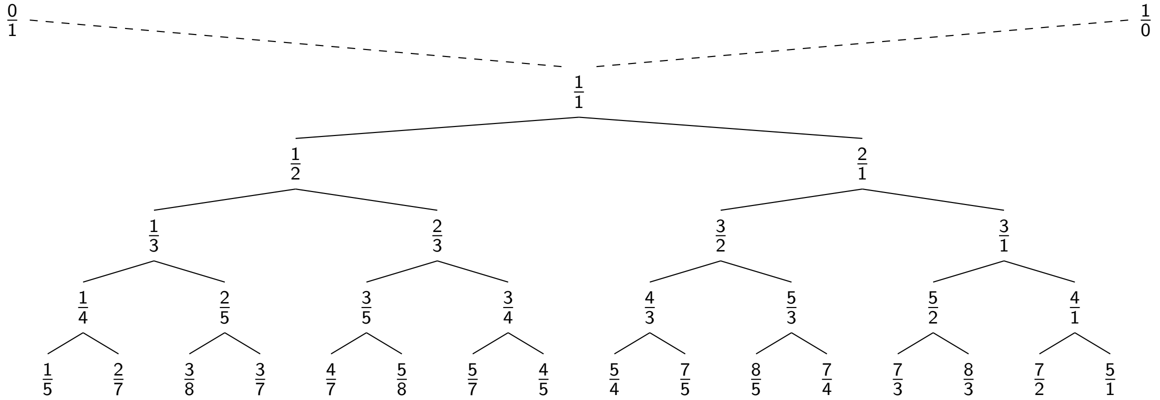
Arbre de Stern-Brocot



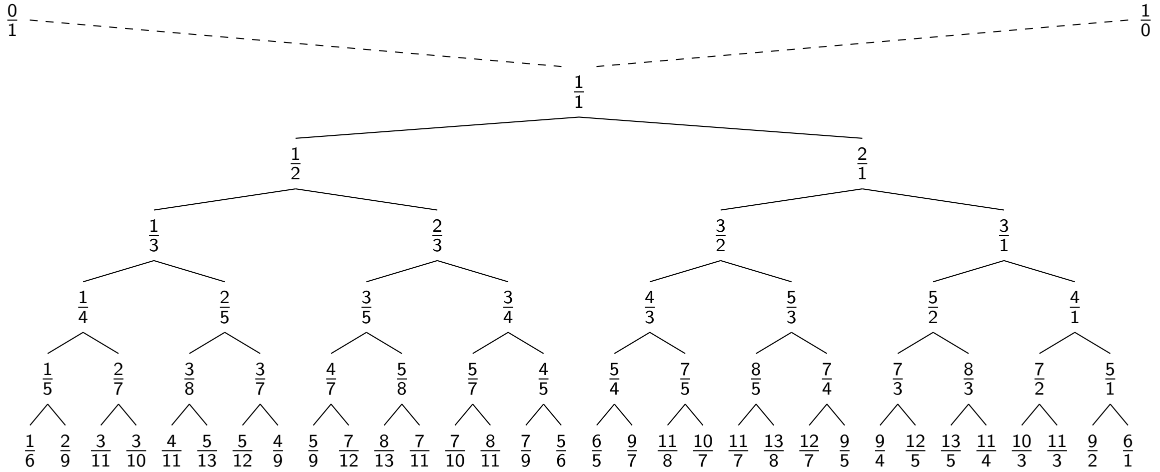
Arbre de Stern-Brocot



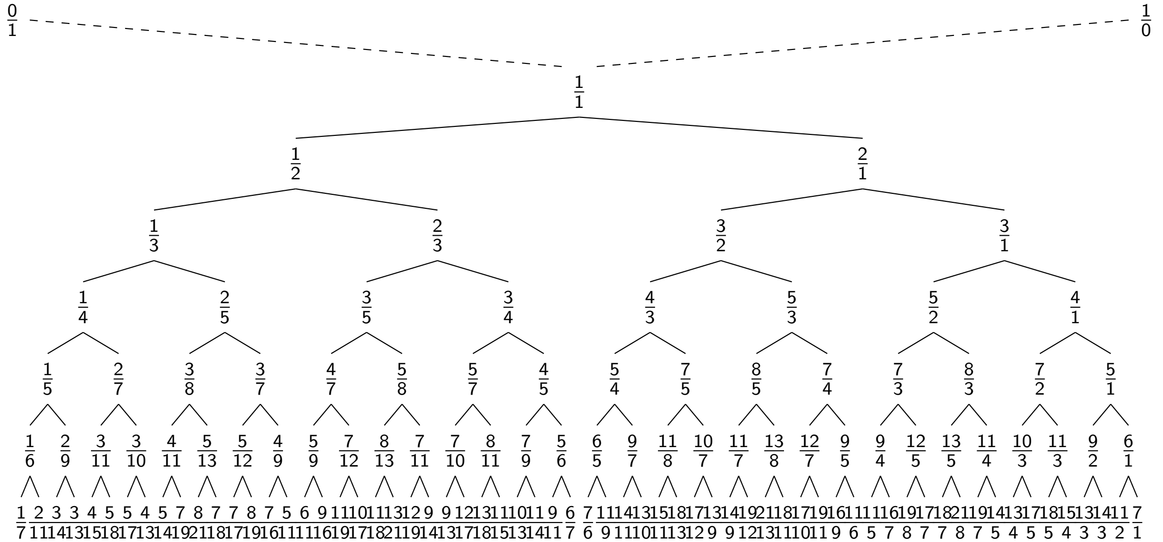
Arbre de Stern-Brocot



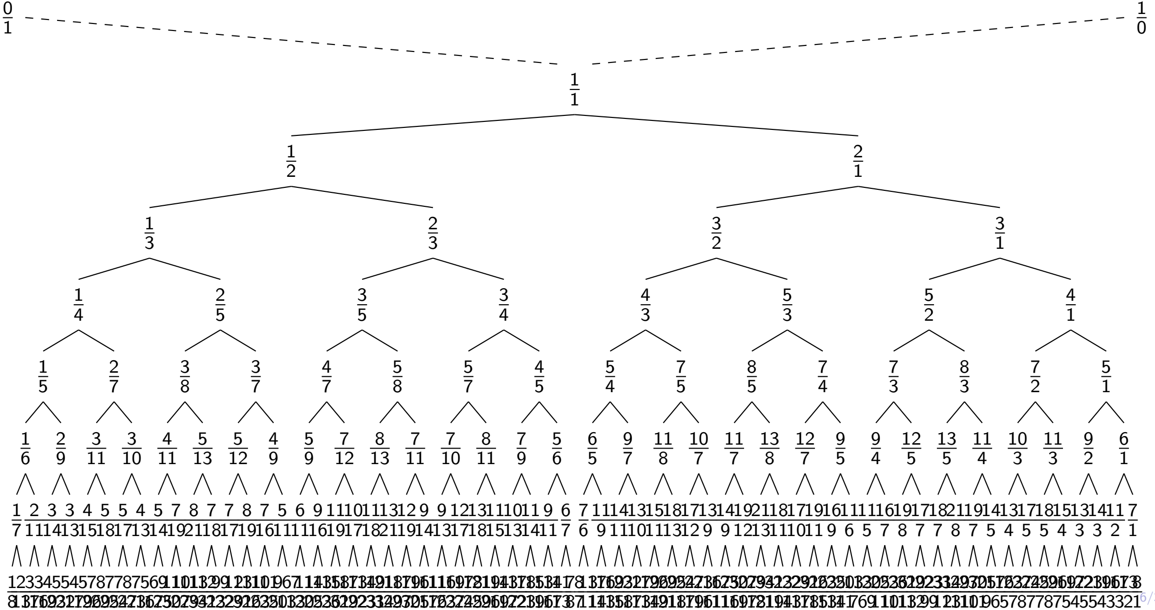
Arbre de Stern-Brocot



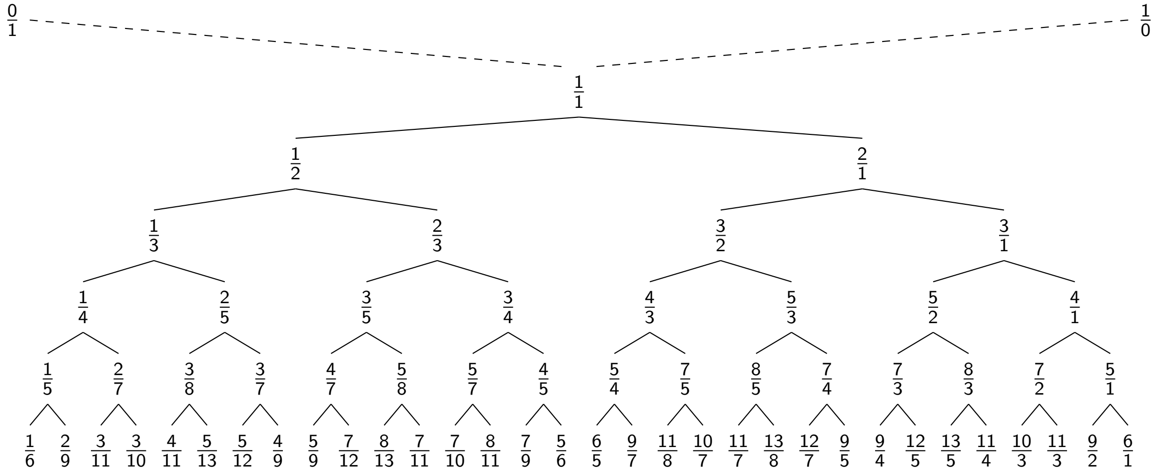
Arbre de Stern-Brocot



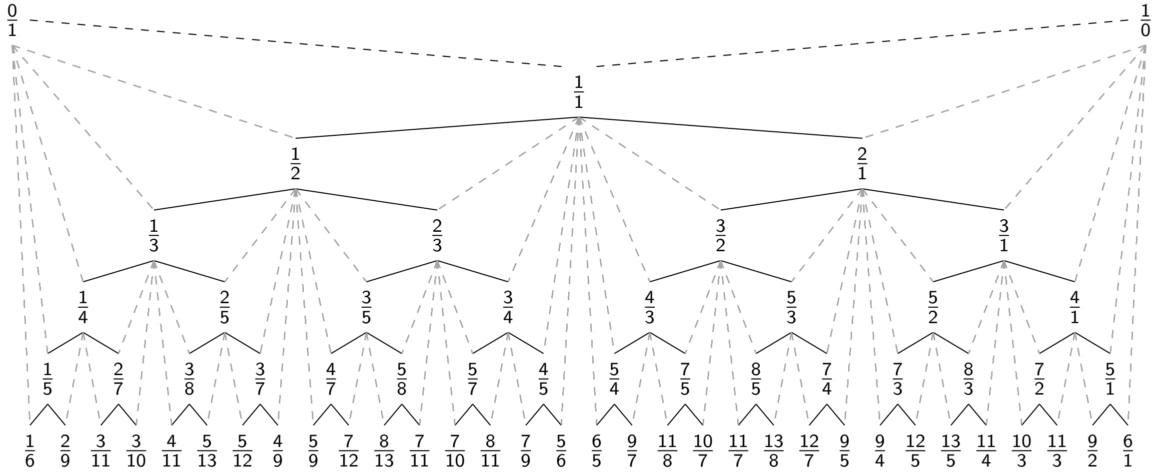
Arbre de Stern-Brocot



Arbre de Stern-Brocot

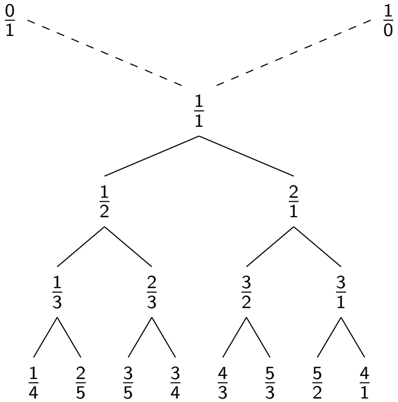


Arbre de Stern-Brocot

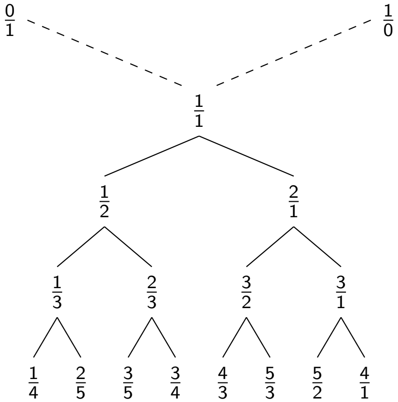


Quelques propriétés de l'arbre de Stern-Brocot

Construction par listes

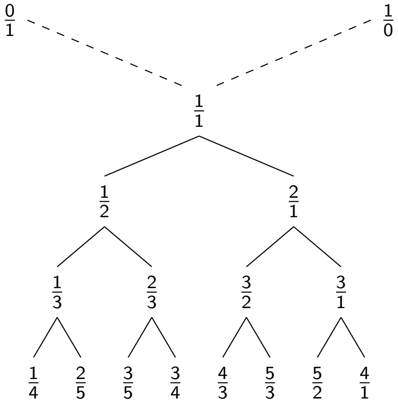


Construction par listes



$$l_0 \quad = \quad \left[\ \frac{0}{1},\ \ \frac{1}{0}\ \right]$$

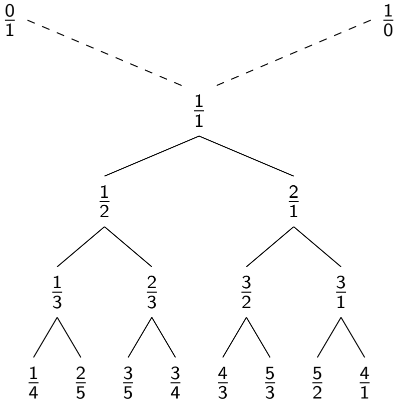
Construction par listes



$$l_0 = \left[\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{0}\ \right]$$

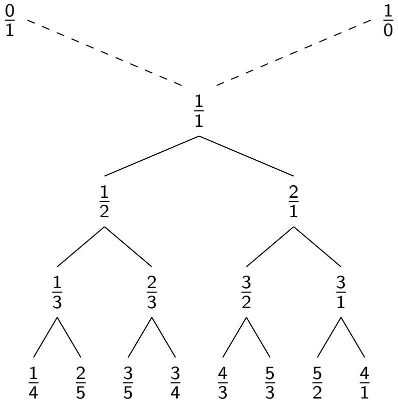
$$l_1 = \left[\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{0}\ \right]$$

Construction par listes



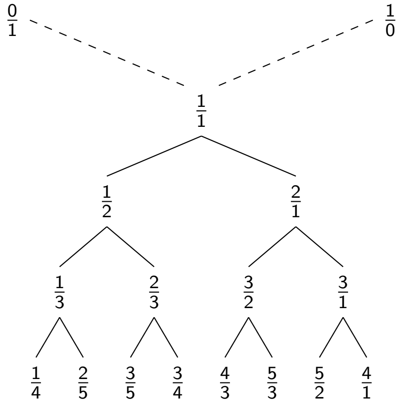
$$
\begin{aligned}
l_0 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_1 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_2 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right]
\end{aligned}
$$

Construction par listes



$$
\begin{aligned}
l_0 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_1 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_2 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_3 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{3}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Construction par listes



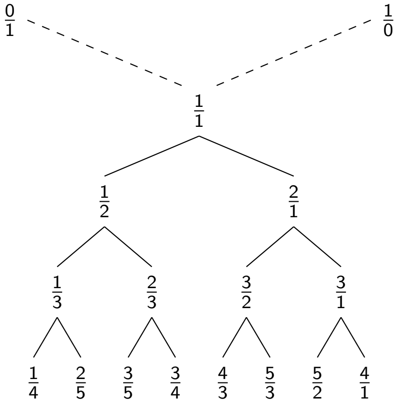
$$
\begin{aligned}
l_0 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_1 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_2 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
l_3 &= \left[\ \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{3}{1},\ \tfrac{1}{0}\ \right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Définition

Deux fractions sont dites ***consécutives*** *si elles sont consécutives dans une liste* l_i.

Théorème

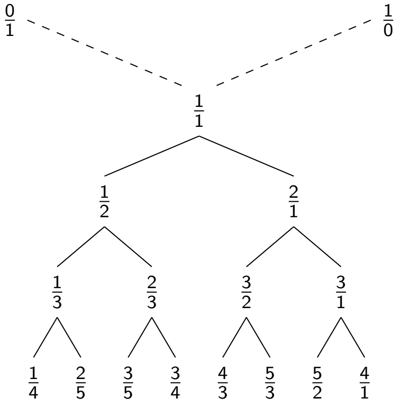
Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions consécutives, $\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = -1.$



Preuve :

Théorème

Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions consécutives, $\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = -1.$



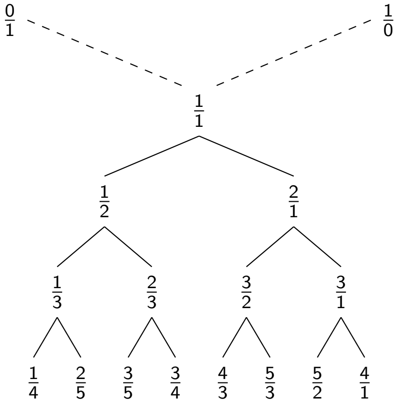
Preuve : par récurrence

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & p+r \\ q & q+s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+r & r \\ q+s & s \end{vmatrix}$$

Corollaire

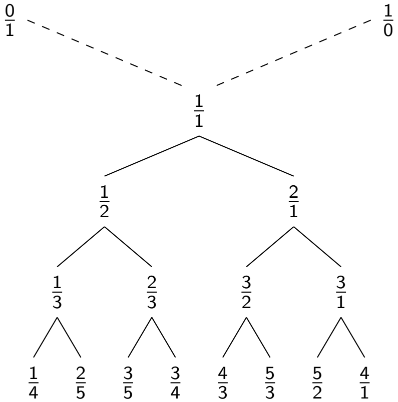
L'arbre de Stern-Brocot est trié.



Preuve :

Corollaire

L'arbre de Stern-Brocot est trié.



Preuve :

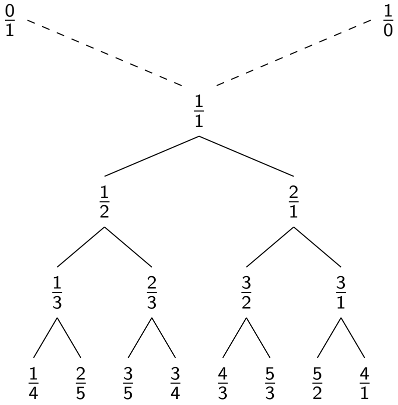
$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \iff \frac{r}{s} - \frac{p}{q} > 0 \iff qr - ps > 0.$$

On vient de voir que si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux fractions consécutives, alors :

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = ps - qr = -1.$$

Corollaire

L'arbre de Stern-Brocot est trié.



Preuve :

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \iff \frac{r}{s} - \frac{p}{q} > 0 \iff qr - ps > 0.$$

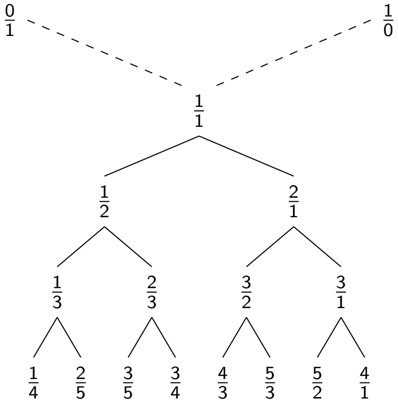
On vient de voir que si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux fractions conséc-utives, alors :

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = ps - qr = -1.$$

Note : il s'agit d'un *arbre binaire de fouille*.

Corollaire

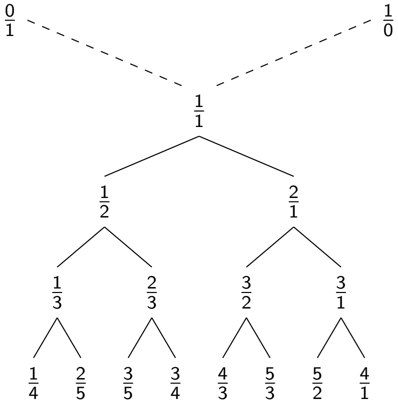
Toutes les fractions dans l'arbre de Stern-Brocot sont réduites.



Preuve :

Corollaire

Toutes les fractions dans l'arbre de Stern-Brocot sont réduites.

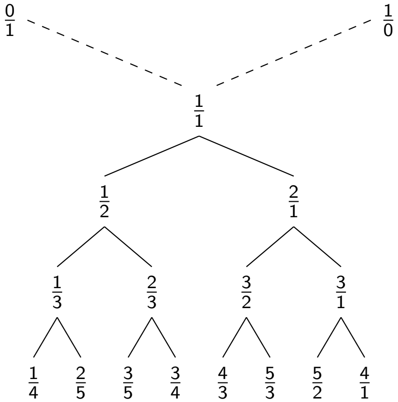


Preuve : soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions consécutives, alors

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = -1.$$

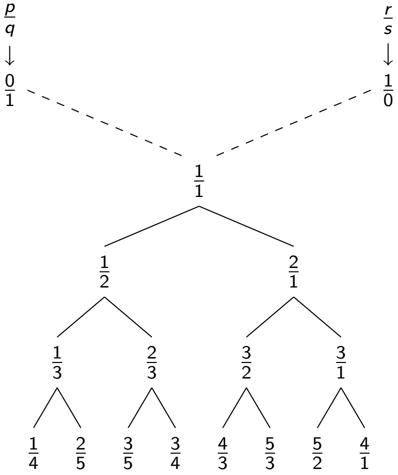
Corollaire

Toute fraction réduite apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot.



Corollaire

Toute fraction réduite apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot.



Algorithme de recherche d'une fration $\frac{a}{b}$.

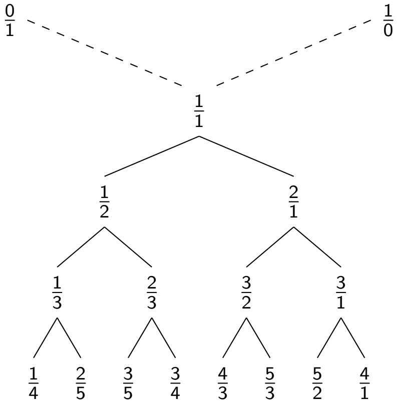
$$\frac{p}{q} := \frac{0}{1}, \qquad \frac{r}{s} := \frac{1}{0}$$

tant que $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ **faire**

> **si** $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ **alors**
>
> > $\dfrac{r}{s} := \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$
>
> **si** $\dfrac{a}{b} > \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ **alors**
>
> > $\dfrac{p}{q} := \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$

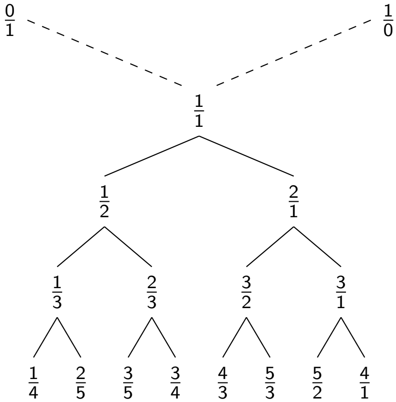
Propriété

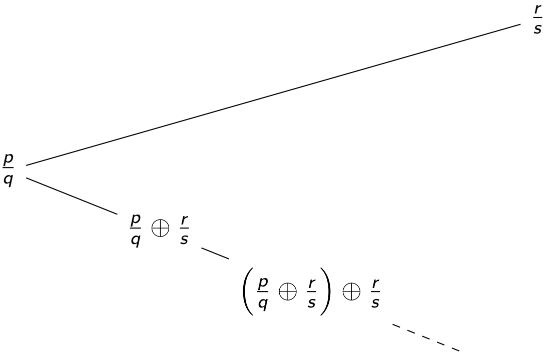
La recherche d'un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ effectue un zig-zag infini.



Propriété

La recherche d'un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ effectue un zig-zag infini.



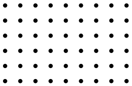


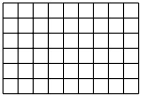
$$\lim_{k \to \infty} \frac{p + kr}{q + ks} = \frac{r}{s}.$$

Géométrie discrète

Géométrie discrète

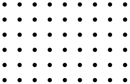
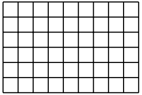
- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :



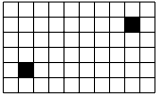


Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

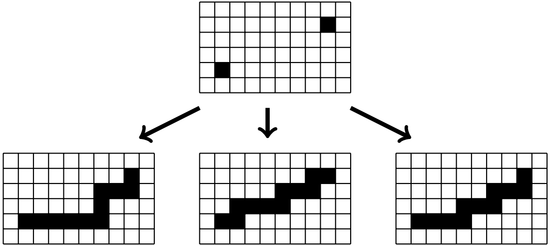
- Le cas des droites



Géométrie discrète

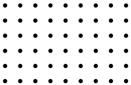
- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

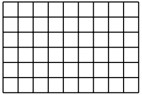
- Le cas des droites



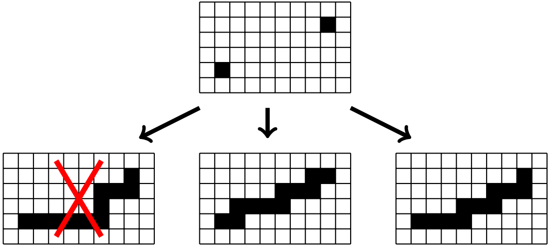
Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :





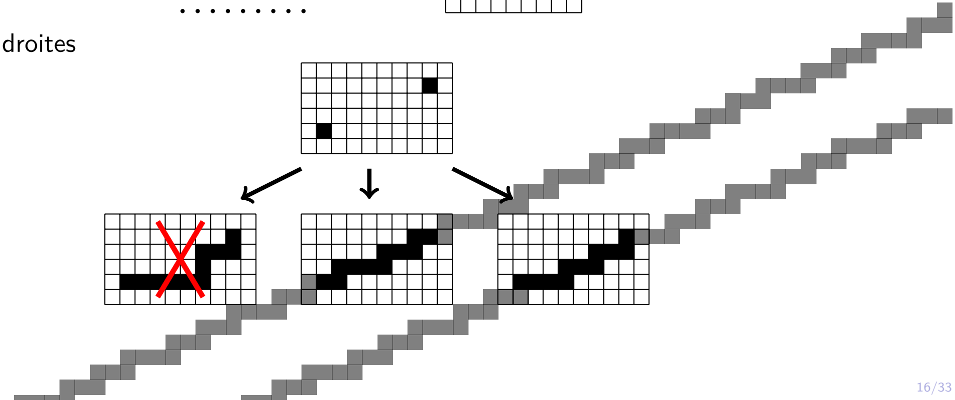
- Le cas des droites



Géométrie discrète

- Objectif : faire de la géométrie dans $\mathbb{Z}^d$.
- Visualisation :

- Le cas des droites

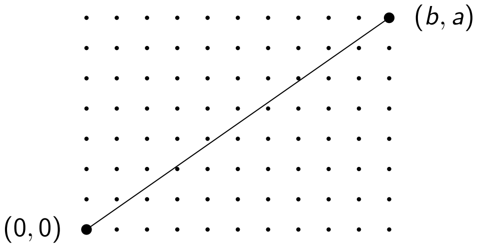


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

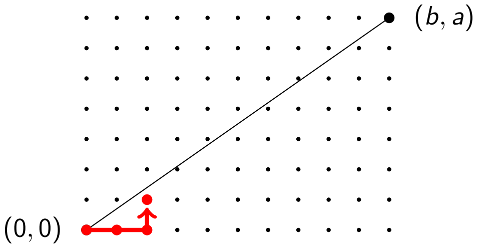


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

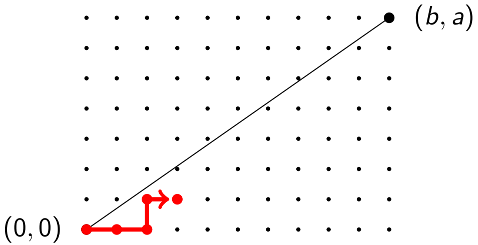


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

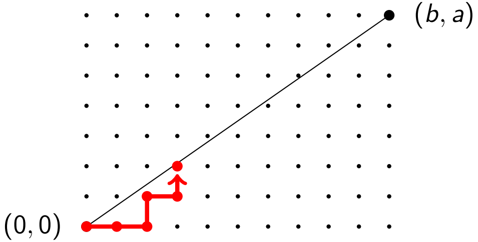


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

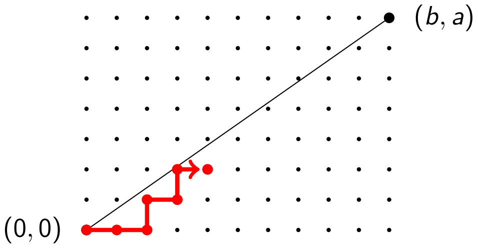


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

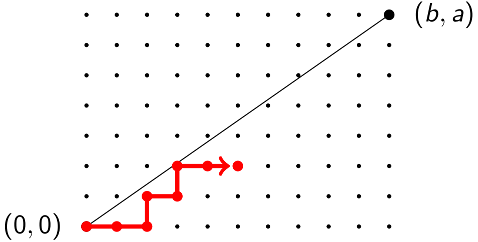


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

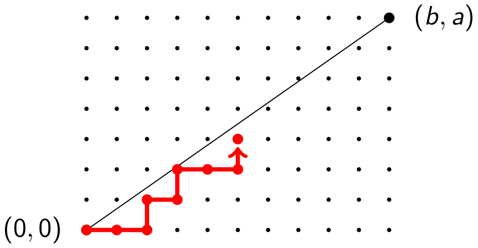


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

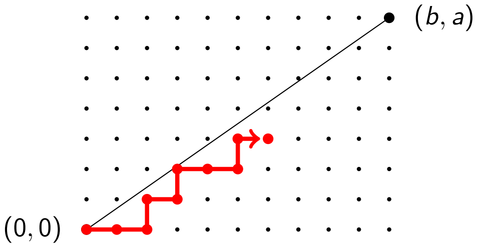


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b, a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b, a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

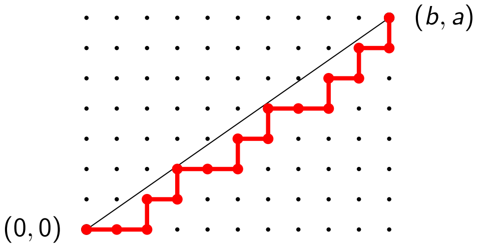


SDDS

Definition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

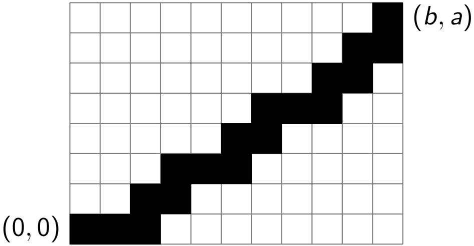


SDDS

Definition

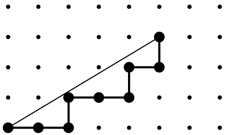
Soient $a, b \in \mathbb{N}$, le **segment de droite discrète standard** de pente $\frac{a}{b}$ est formé par l'unique chemin discret qui :

- va de $(0,0)$ à (b,a),
- formé des pas $\rightarrow$ et $\uparrow$,
- reste sous la droite passant par $(0,0)$ et (b,a),
- ne laisse aucun point de $\mathbb{Z}^2$ entre le chemin et la droite.

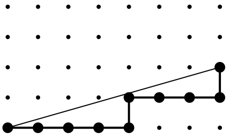


Composition de SDDS

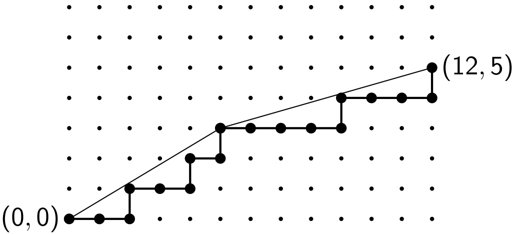
SDDS de pente 3/5



SDDS de pente 2/7

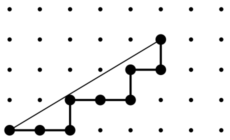


Composition des deux SDDS

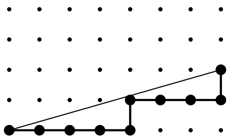


Composition de SDDS

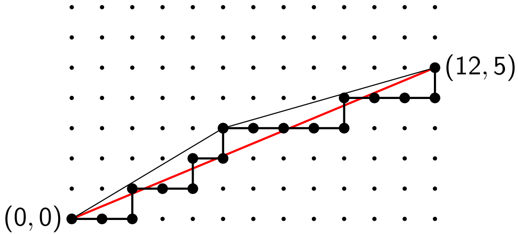
SDDS de pente $3/5$



SDDS de pente $2/7$

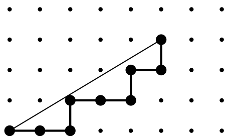


Composition des deux SDDS

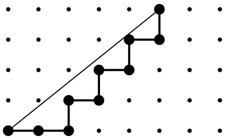


Composition de SDDS

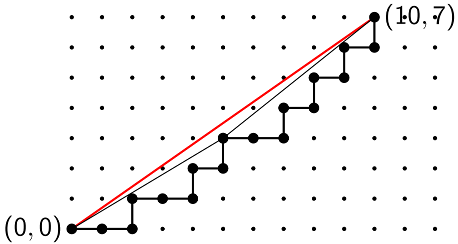
SDDS de pente $3/5$



SDDS de pente $4/5$

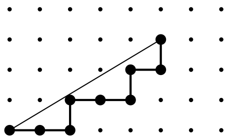


Composition des deux SDDS

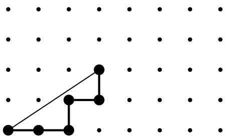


Composition de SDDS

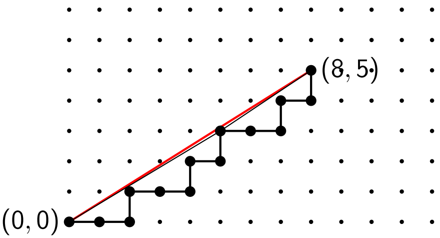
SDDS de pente 3/5



SDDS de pente 2/3



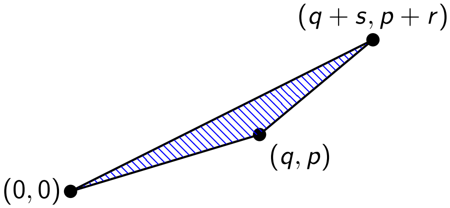
Composition des deux SDDS



Composition de SDDS

Théorème

Si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux fractions consécutives, alors la composition des SDDS de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ est le SDDS de pente $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$.

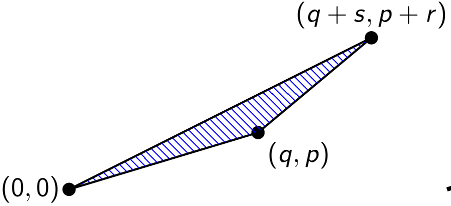


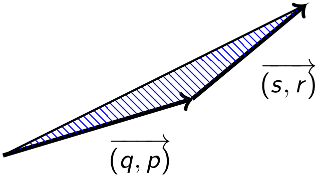
Théorème de Pick

Composition de SDDS

Théorème

Si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux fractions consécutives, alors la composition des SDDS de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ est le SDDS de pente $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$.



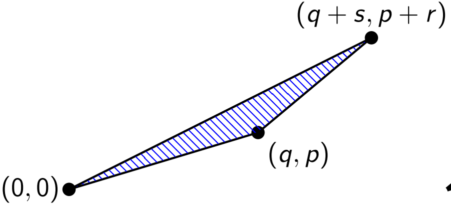


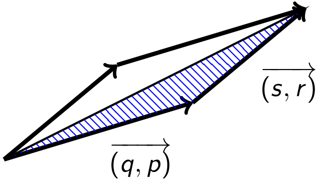
Théorème de Pick

Composition de SDDS

Théorème

Si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux fractions consécutives, alors la composition des SDDS de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ est le SDDS de pente $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$.





$$A = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

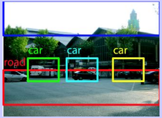
Théorème de Pick

Applications en analyse d'images

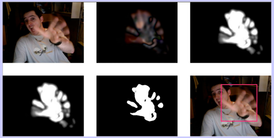
Définition (Wikipedia)

*«L'**analyse d'images** est l'extraction d'informations significatives dans des images; principalement d'images digitales, par des techniques de traitement d'image digitales.»*

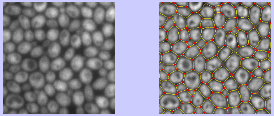
Reconnaissance d'objets



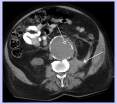
Détection/suivi du mouvement



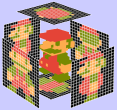
Segmentation



Imagerie médicale



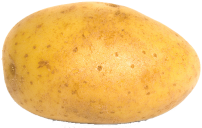
Reconstruction 3D



Optical character recognition

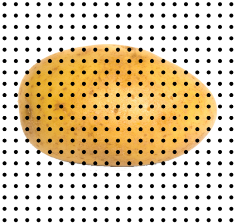
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



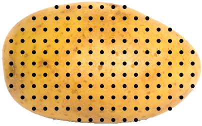
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



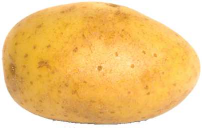
Discrétisation

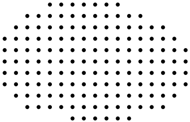
Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

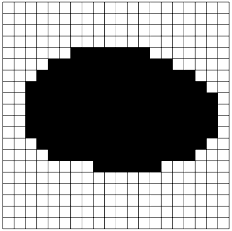


Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

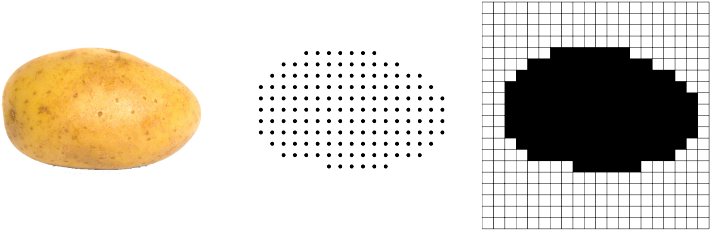






Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

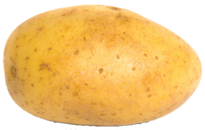


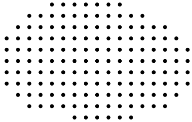
Étant donné $\mathrm{Disc}(P)$, que peut-on dire de P ?

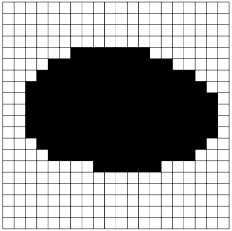
- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- ...

Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Disc}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

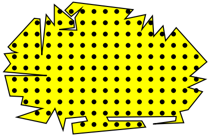




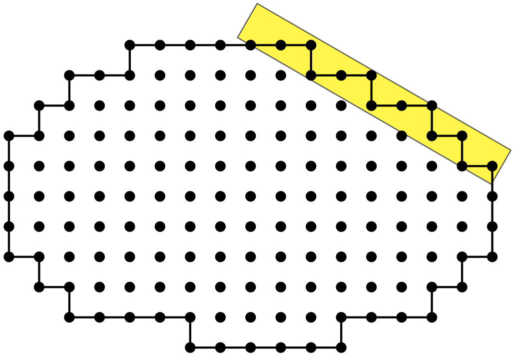


Étant donné $\mathrm{Disc}(P)$, que peut-on dire de P ?

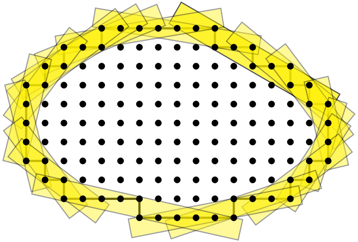
- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- ...



SDD maximaux sur bord d'une forme discrète



Tangential cover



Définition ([Feschet, Tougne 99])

The tangential cover of a discrete shape is the sequence of all maximal DSS on its boundary.

Théorème ([Debled-Rennesson, Reveilles 1995][Lachaud, Vialard, de Vieilleville 2007])

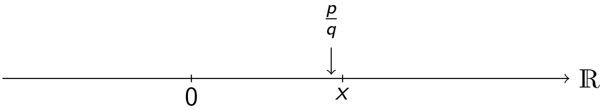
The computation of the tangential cover take a time in $\mathcal{O}(n)$ where n is the number of points on the boundary of the shape.

Applications of the tangential cover include :

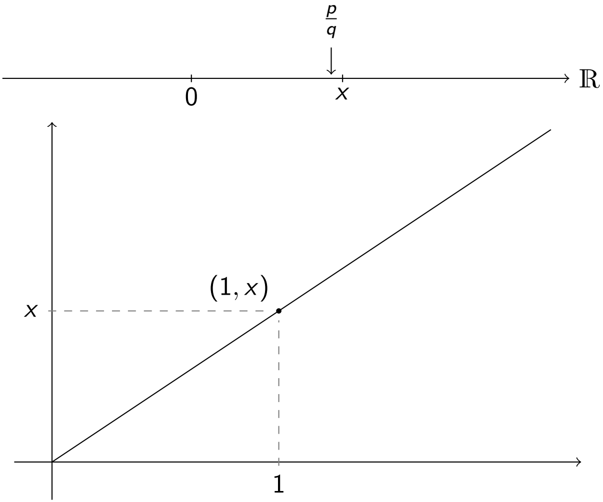
- Convexity test [Debled-Rennesson, Reiter-Doerksen 04]
- Tangent estimation [Feschet, Tougne 99], [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Length estimation [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Curvature estimation [Lachaud, Kerautret, Naegel 08]
- Automatic noise detection [Lachaud, Kerautret 12]

Approximation d'un réel

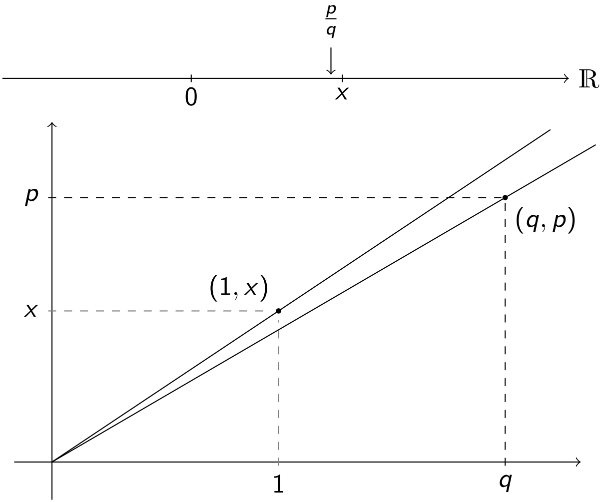
Approximation d'un irrationnel



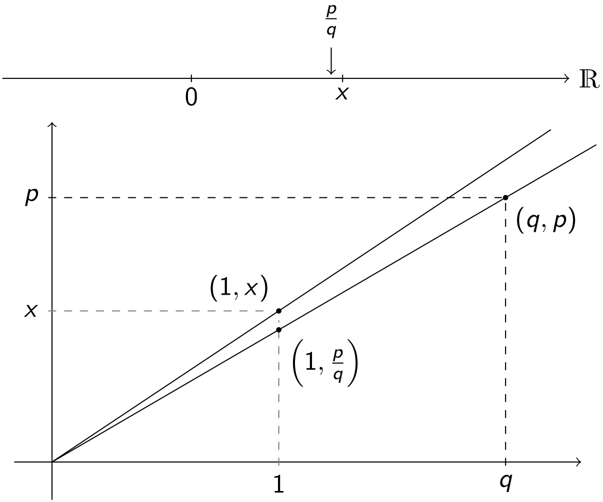
Approximation d'un irrationnel



Approximation d'un irrationnel

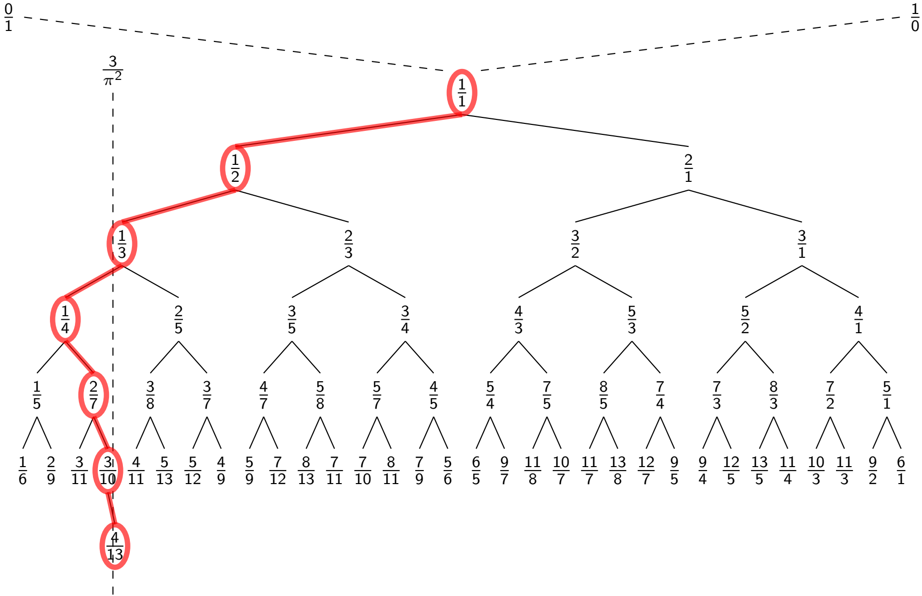


Approximation d'un irrationnel

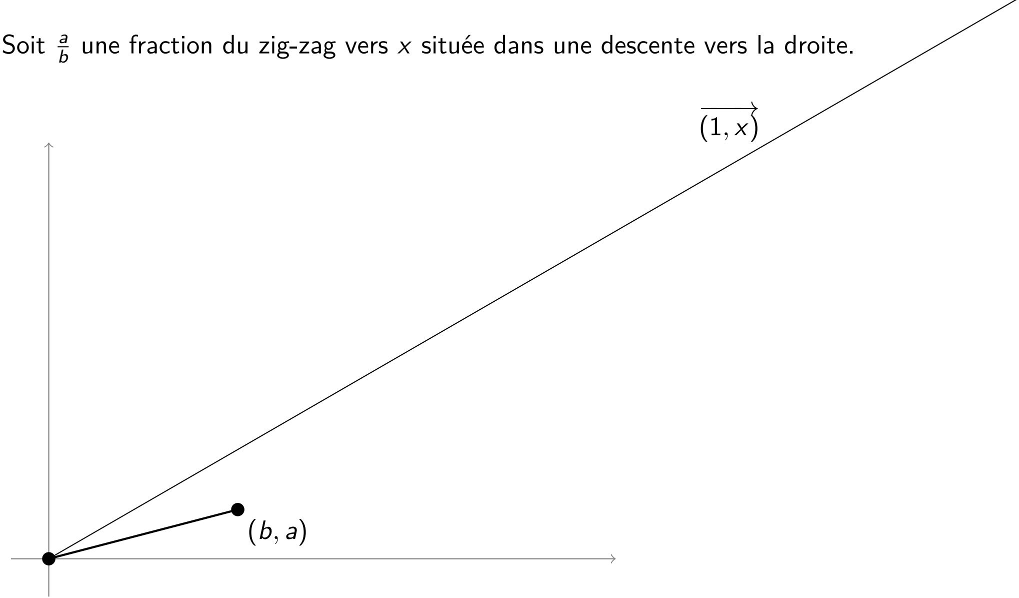


Plus l'approximation est bonne, plus l'angle est petit et vice-versa.

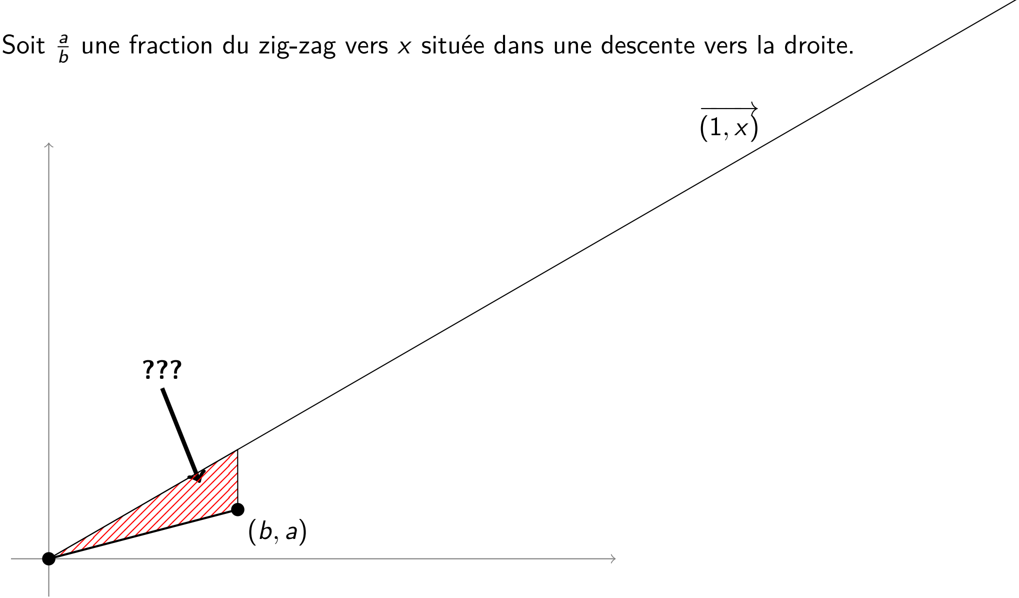
Recherche d'un irrationnel dans l'arbre de Stern-Brocot



Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.

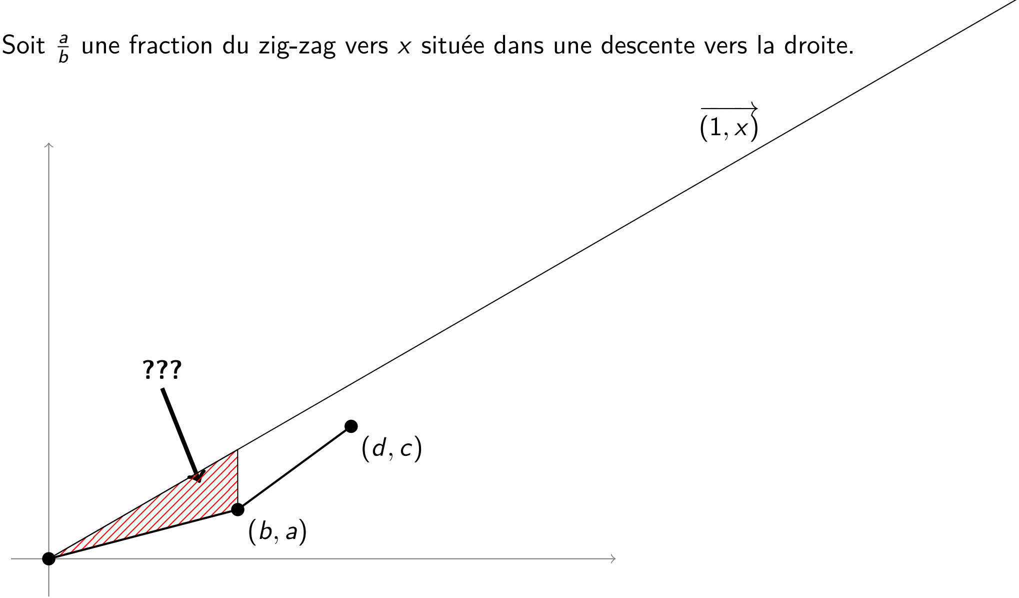


Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.



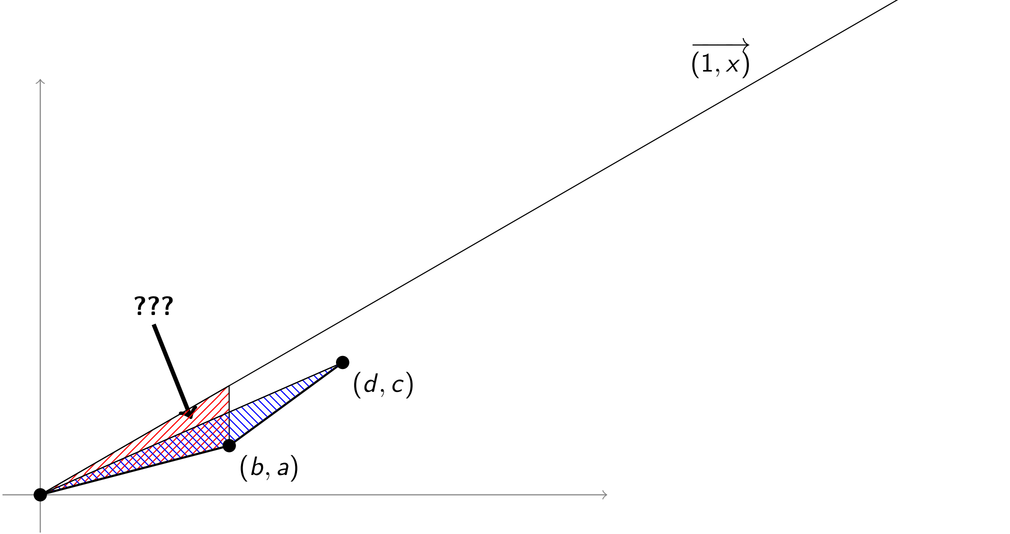
$\frac{a}{b}$ est une *bonne sous-approximation* de x ssi il n'y a pas de point entier dans

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.



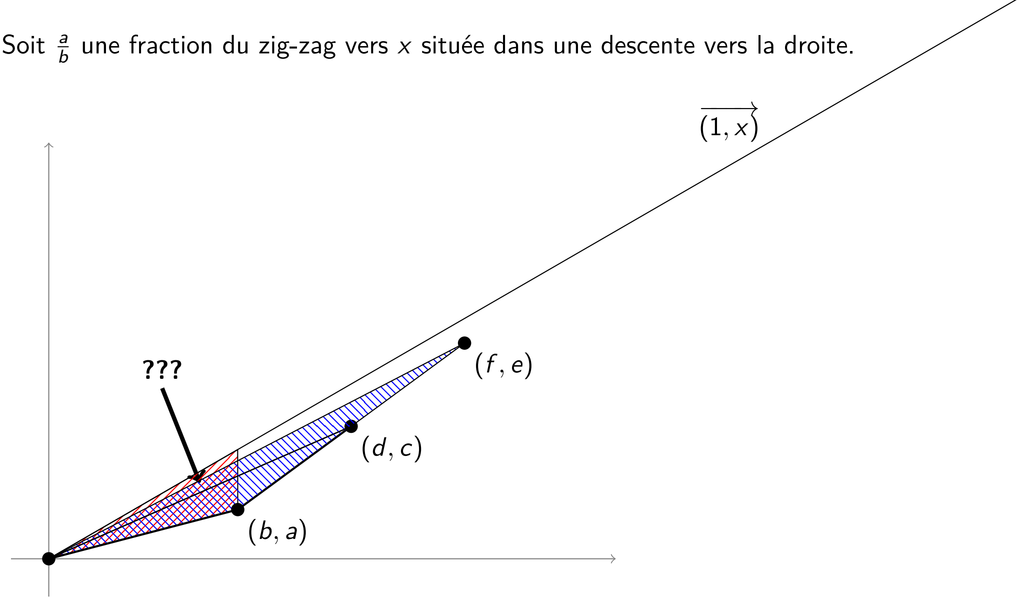
$\frac{a}{b}$ est une *bonne sous-approximation* de x ssi il n'y a pas de point entier dans

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.



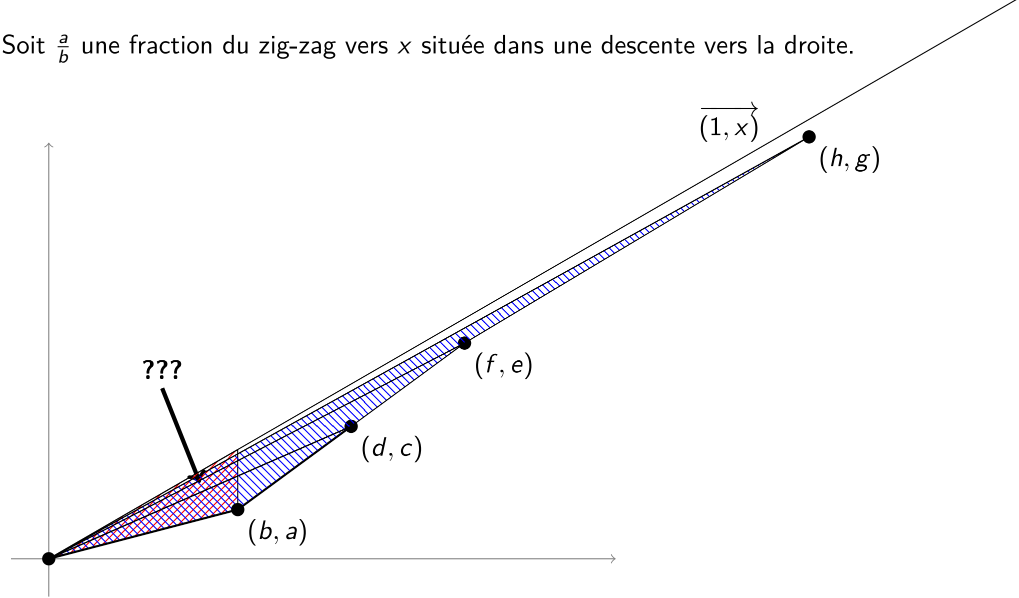
$\frac{a}{b}$ est une *bonne sous-approximation* de x ssi il n'y a pas de point entier dans

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.



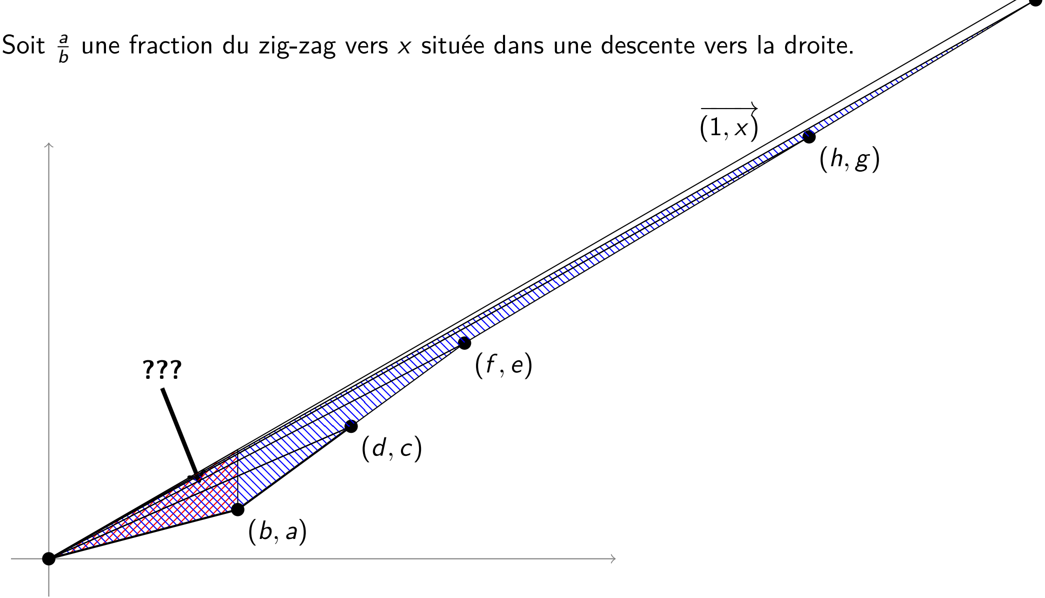
$\frac{a}{b}$ est une *bonne sous-approximation* de x ssi il n'y a pas de point entier dans 

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.



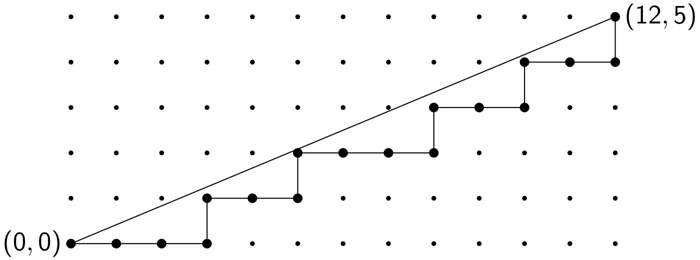
$\frac{a}{b}$ est une *bonne sous-approximation* de x ssi il n'y a pas de point entier dans

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction du zig-zag vers x située dans une descente vers la droite.

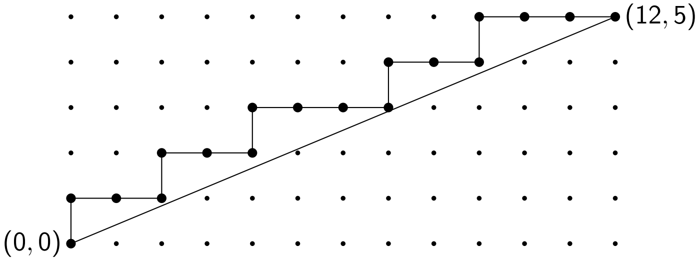


$\frac{a}{b}$ est une *bonne sous-approximation* de x ssi il n'y a pas de point entier dans

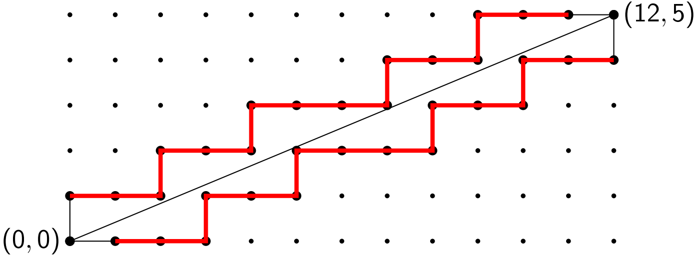
Sur-approximations



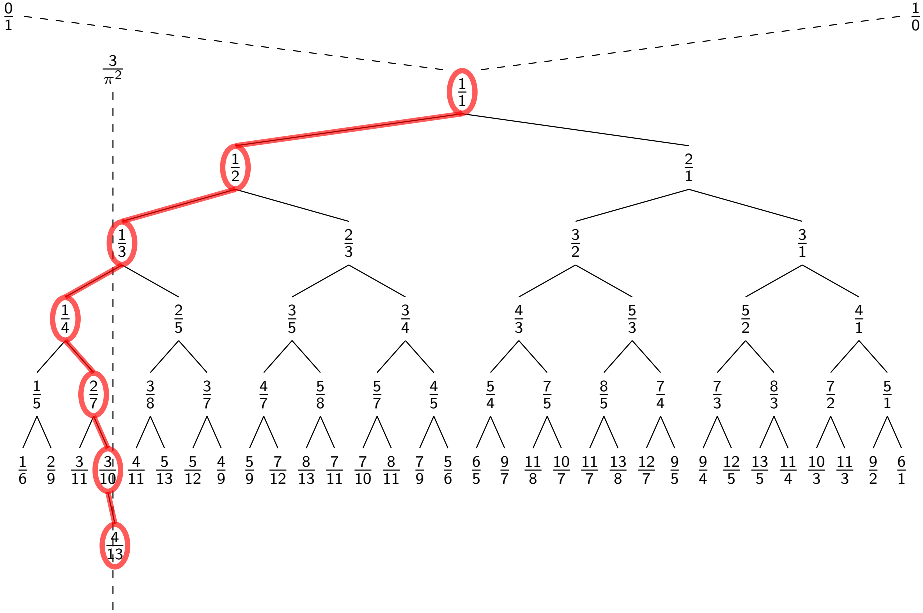
Sur-approximations



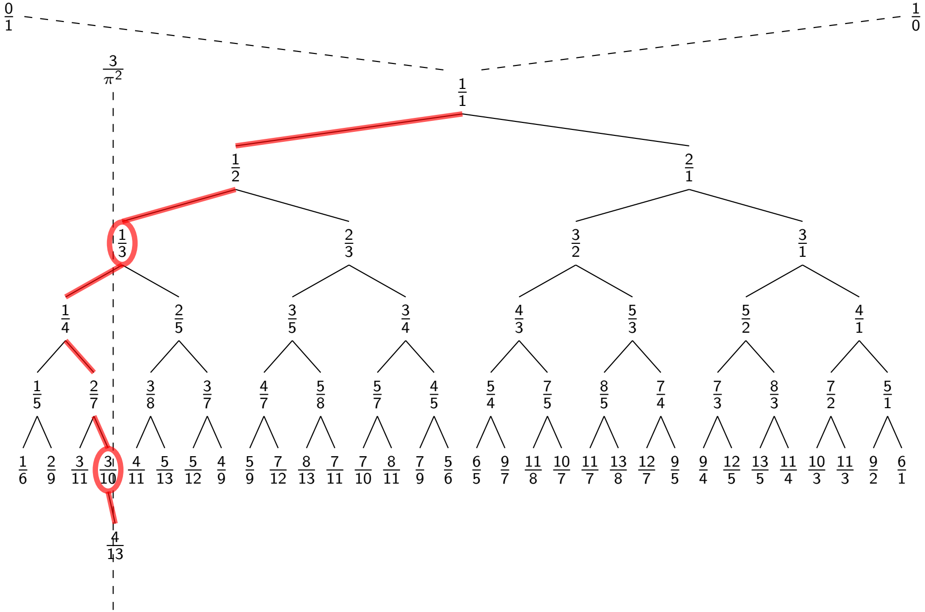
Sur-approximations



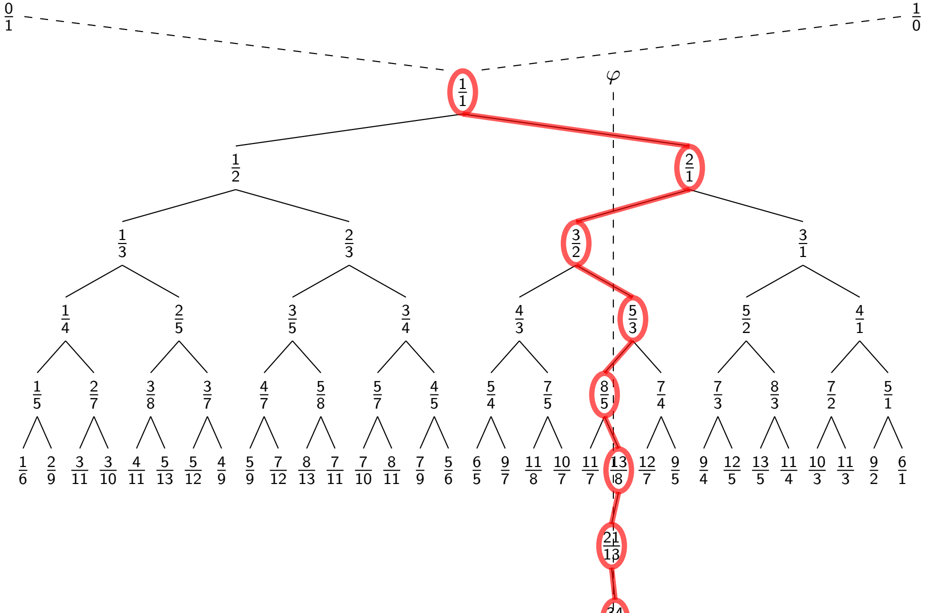
Approximation d'un réel



Approximation d'un réel



Approximation d'un réel



Fin

Fin