Comprendre la structure des plans discrets via les fractions continues généralisées

Xavier Provençal
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie

LAMA
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie

Dyna3S

Outline

1. Structure récursive des droites discrètes

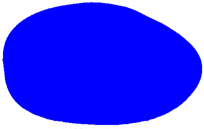
2. Structure récursive des plans discrets

3. Algorithme de reconnaissance

Motivations : analyse d'images

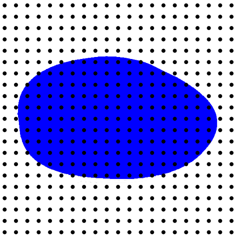
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



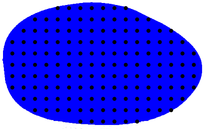
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



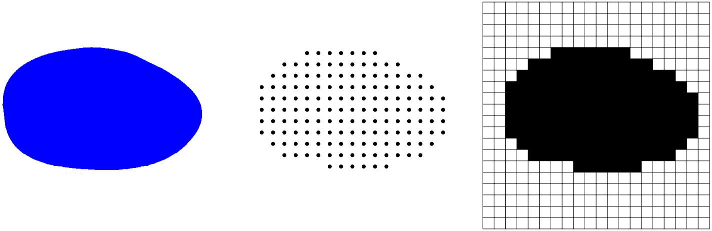
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



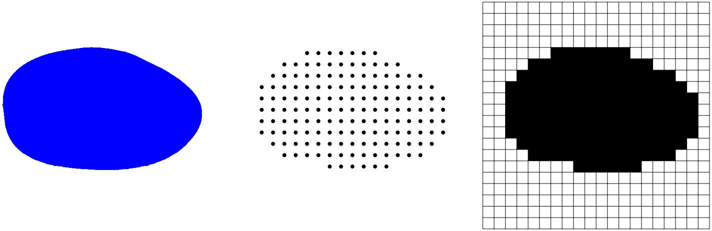
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

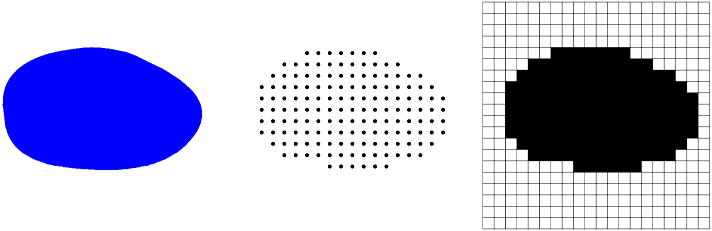


Étant donné $\mathrm{Dig}(P)$, que peut-on dire de P ?

- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- etc.

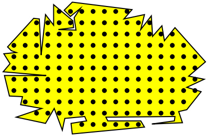
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



Étant donné $\mathrm{Dig}(P)$, que peut-on dire de P ?

- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- etc.



Un outil pour le cas 2D :

- **Segments de droites discrètes.**

Droite discrète arithmétique

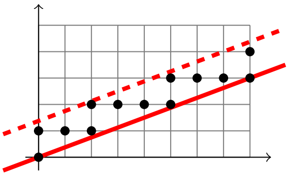
Definition (Reveillès (1991), Kovalev (1990))

La **droite discrète arithmétique** standard est :

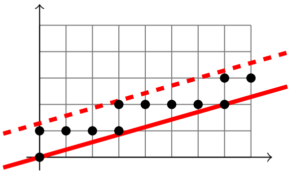
$$\mathcal{D}((a,b),\mu) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \langle (a,b),(x,y) \rangle + \mu < \|(a,b)\|_1\}$$

où

- (a,b) est le **vecteur normal**,
- $-b/a$ est la **pente**,
- μ est le **décalage**.



$\mathcal{D}((-3,8),0)$

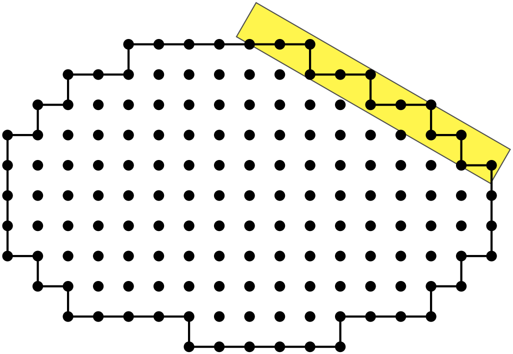


$\mathcal{D}((-2,7),0)$

Segments de droite discrète

Definition

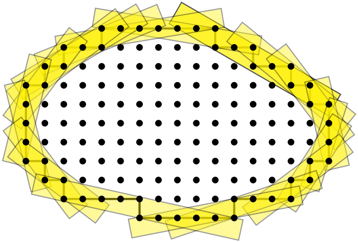
Un **Segment de droite discrète** est un sous-ensemble fini et connexe d'une droite discrète.



Couverture tangentielle

Definition ([Feschet, Tougne 99])

La **couverture tangentielle** d'une forme discrète est la liste des segments maximaux formés par son bord.



Theorem ([Debled-Rennesson, Reveillès 1995][Lachaud, Vialard, de Vieilleville 2007])

Le calcul de la couverture tangentielle prend un temps dans $\mathcal{O}(n)$ où n est le nombre de points sur le bord de la forme.

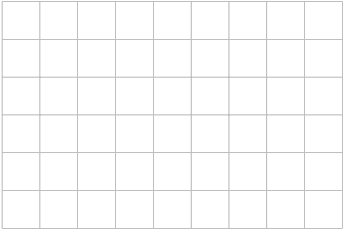
Applications de la couverture tangentielle :

- Teste de convexité [Debled-Rennesson, Reiter-Doerksen 04]
- Estimation de longueur [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Estimation de courbure [Lachaud, Kerautret, Naegel 08]
- Estimation de tangente [Feschet, Tougne 99], [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Détection de bruit automatique [Lachaud, Kerautret 12]

Christoffel words

Definition ([Christoffel 1875])

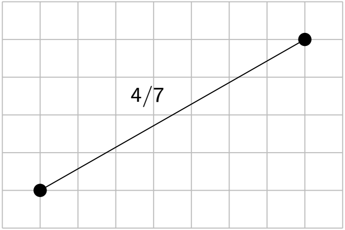
Un **mot de Christoffel** code le chemin digital immédiatement sous le segment reliant deux points entiers.



Christoffel words

Definition ([Christoffel 1875])

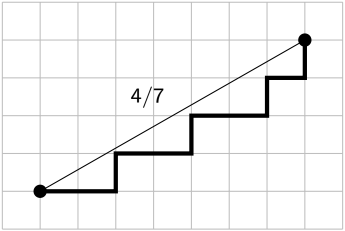
Un **mot de Christoffel** code le chemin digital immédiatement sous le segment reliant deux points entiers.



Christoffel words

Definition ([Christoffel 1875])

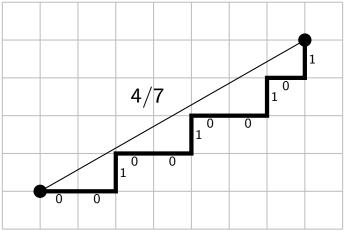
Un **mot de Christoffel** code le chemin digital immédiatement sous le segment reliant deux points entiers.



Christoffel words

Definition ([Christoffel 1875])

Un **mot de Christoffel** code le chemin digital immédiatement sous le segment reliant deux points entiers.

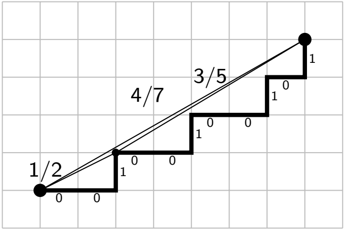


$w = 00100100101$ est le mot de Christoffel de **pente** $4/7$.

Christoffel words

Definition ([Christoffel 1875])

Un **mot de Christoffel** code le chemin digital immédiatement sous le segment reliant deux points entiers.



$w = 001 \cdot 00100101$ est le mot de Christoffel de **pente** $4/7$.

Theorem ([Borel, Laubie 93])

Tout mot de Christiffel, autre que 0 *et* 1*, s'écrit de manière* ***unique*** *comme un produit de* ***deux*** *mots de Christoffel.*

Ceci s'appelle la **factorisation standard**, notée $w = (u, v)$.

Christoffel Tree

If (u, v) is a standard factorization, then (u, uv) and (uv, v) are standard factorizations of Christoffel words.

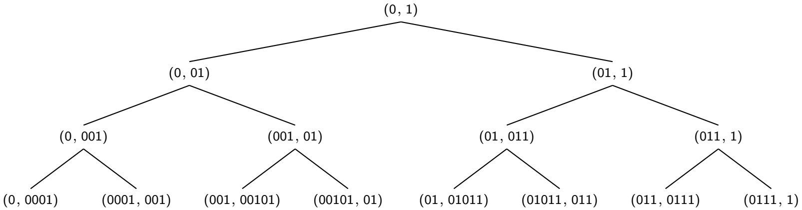
Christoffel Tree

If (u, v) is a standard factorization, then (u, uv) and (uv, v) are standard factorizations of Christoffel words.

The **Christoffel Tree** is the tree obtained, starting from $(0, 1)$, using the rule :

$$(u, v)$$

$$(u, uv) \qquad\qquad (uv, v)$$



Christoffel Tree

If (u, v) is a standard factorization, then (u, uv) and (uv, v) are standard factorizations of Christoffel words.

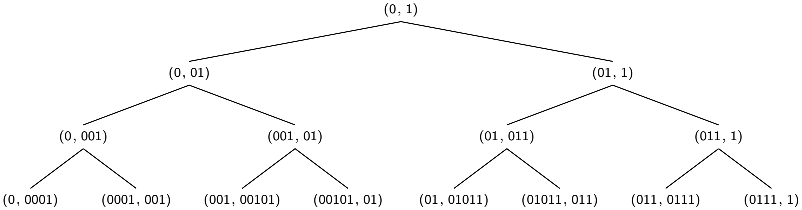
The **Christoffel Tree** is the tree obtained, starting from $(0, 1)$, using the rule :

$$(u, v)$$

$$(u, uv) \qquad\qquad (uv, v)$$

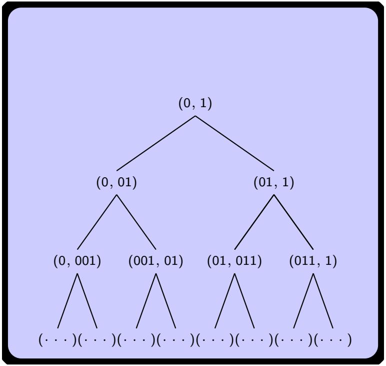
Theorem

Every Christoffel word appears exactly once in the Christoffel Tree.

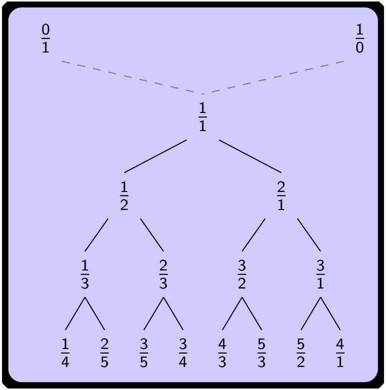


Stern-Brocot Tree

Christoffel tree



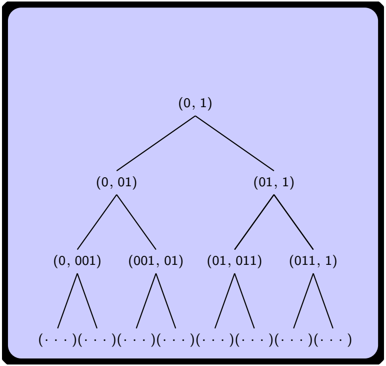
Stern-Brocot tree.



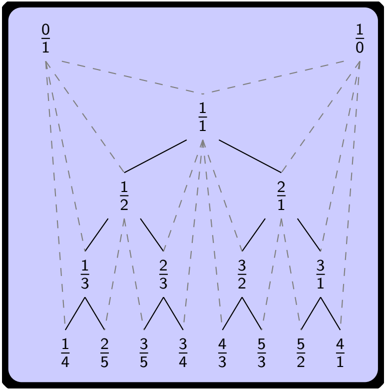
Every irreducible fraction appears exactly once in the Stern-Brocot tree.

Stern-Brocot Tree

Christoffel tree



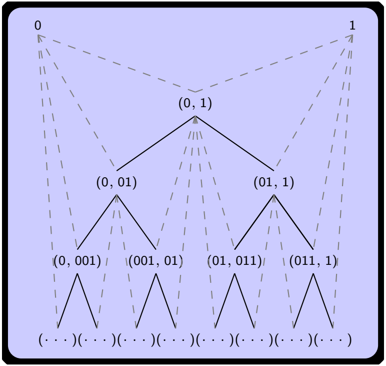
Stern-Brocot tree.



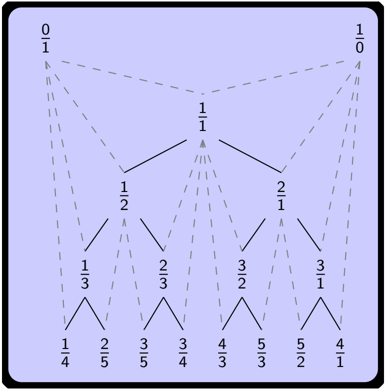
Every irreducible fraction appears exactly once in the Stern-Brocot tree.

Stern-Brocot Tree

Christoffel tree



Stern-Brocot tree.



Every irreducible fraction appears exactly once in the Stern-Brocot tree.

Recursive formula

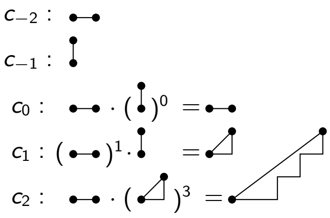
Theorem ([Berstel 92])

The Christoffel word c_n of slope $[z_0; z_1, \ldots, z_n]$ is given recursively by :

$$c_n = \begin{cases} c_{2m-2}\, c_{2m-1}^{z_{2m}} & \text{if } n = 2m, \\ c_{2m}^{z_{2m+1}}\, c_{2m-1} & \text{if } n = 2m+1. \end{cases} \qquad \text{where } c_{-1} = 1, \text{ and } c_{-2} = 0,$$

Example : $3/4 = [0; 1, 3]$,

$$\begin{aligned} c_{-2} &= \ 0, \\ c_{-1} &= \ 1, \\ c_0 &= c_{-2} \cdot c_{-1}^0 = 0 \cdot (1)^0 = 0, \\ c_1 &= c_0^1 \cdot c_{-1} = (0)^1 \cdot 1 = 01, \\ c_2 &= c_0 \cdot c_1^3 = 0 \cdot (01)^3 = 0010101, \end{aligned}$$



Nested prefixes

Corollary

A Christoffel word that admits $w = (u, v)$ as a proper prefix, has a prefix of the form : $w^k v = (w, w^{k-1} v)$.

Identifying the longest prefix that is a Christoffel word :

Nested prefixes

Corollary

A Christoffel word that admits $w = (u, v)$ as a proper prefix, has a prefix of the form : $w^k v = (w, w^{k-1} v)$.

Identifying the longest prefix that is a Christoffel word :

Nested prefixes

Corollary

A Christoffel word that admits $w = (u, v)$ as a proper prefix, has a prefix of the form : $w^k v = (w, w^{k-1} v)$.

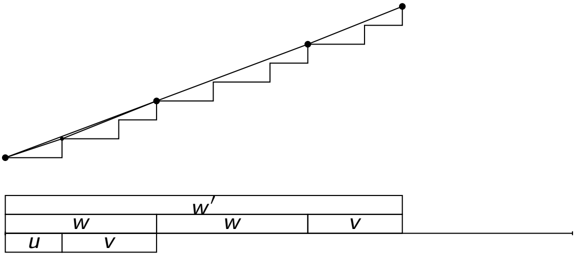
Identifying the longest prefix that is a Christoffel word :

Nested prefixes

Corollary

A Christoffel word that admits $w = (u, v)$ as a proper prefix, has a prefix of the form : $w^k v = (w, w^{k-1} v)$.

Identifying the longest prefix that is a Christoffel word :

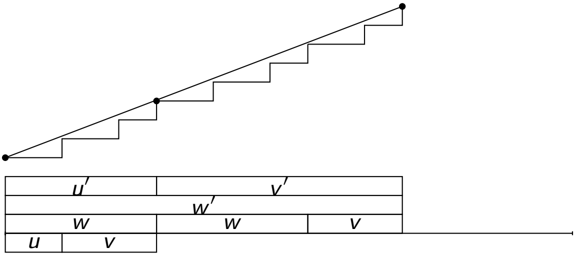


Nested prefixes

Corollary

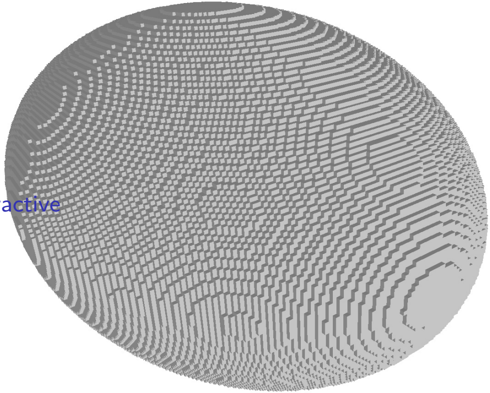
A Christoffel word that admits $w = (u, v)$ as a proper prefix, has a prefix of the form : $w^k v = (w, w^{k-1} v)$.

Identifying the longest prefix that is a Christoffel word :



Part II

Structure récursive des plans discrets



Plans discrets

Construction par Fully Subtractive

Cas rationnel

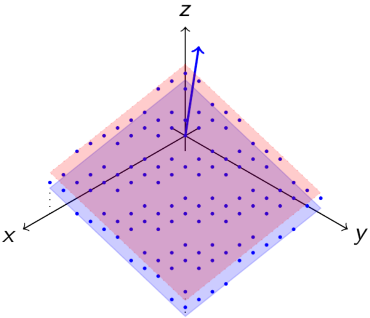
Plan discrets arithmétique

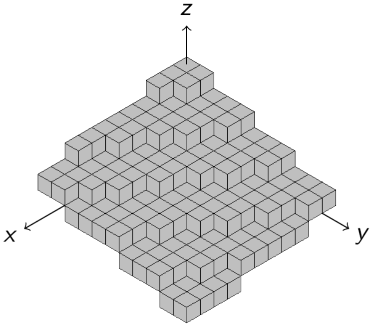
Definition ([Reveillès 91],[Forchhammer 89])

Le plan discret de **vecteur normal** $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et d'**épaisseur** θ.

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$

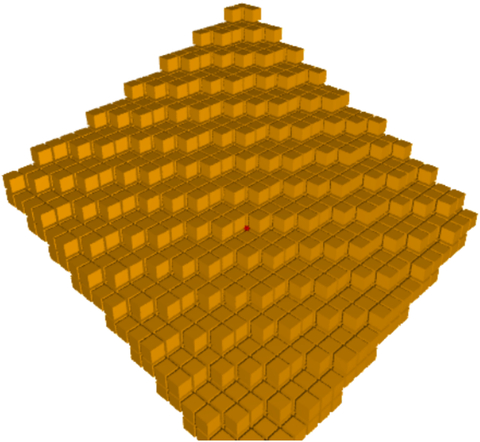
Dans le cas où $\theta = \|\boldsymbol{v}\|_1$ alors $\mathcal{P}$ est dit **standard**.





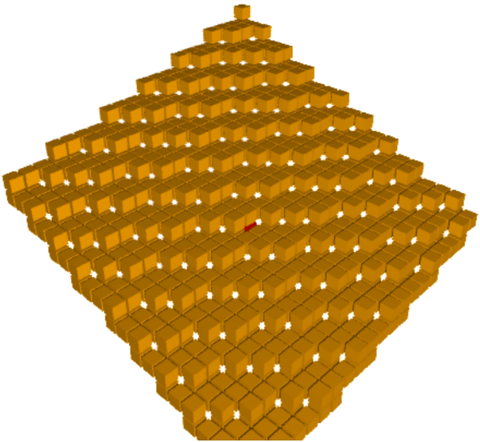
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



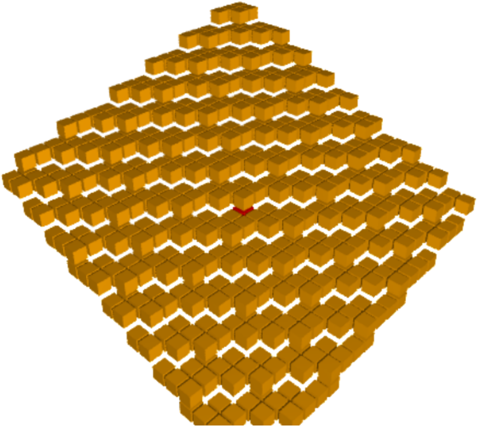
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



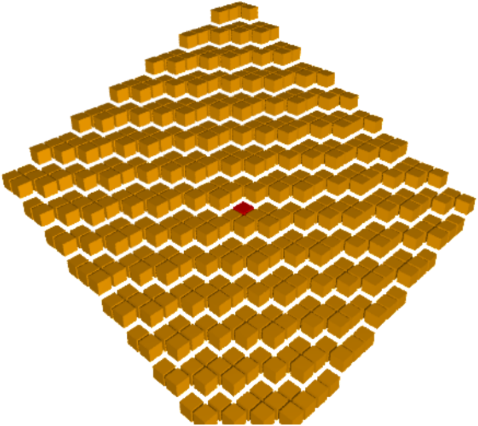
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



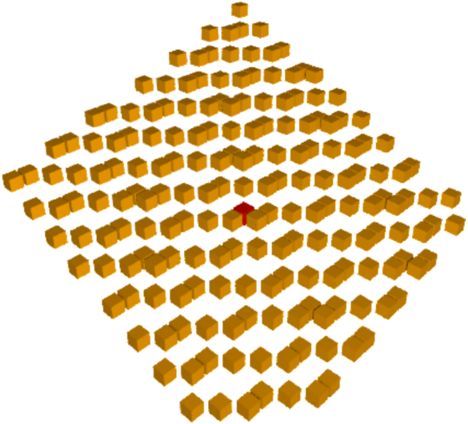
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



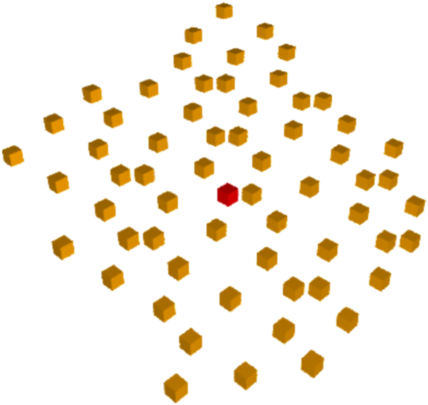
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mu, \theta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



Épaisseur de connexité

Question

Étant donné v et μ, comment déterminer:

$$\inf\{\theta \mid \mathcal{P}(v,\mu,\theta) \textit{ est connecté } \}?$$

- Travaux reliés dans le cadre de la théorie de la percolation :
  [Meester 89], [Kraaikamp, Meester 95]
- Test de connexité :
  [Gérard 02]
- Calcul de l'épaisseur de connexité :
  [Jamet, Toutant 09], [Domenjoud, Jamet, Toutant 09]
- Étude du cas de Tribonacci en lien avec la β-numération :
  [Berthé, Domenjoud, Jamet, P. 13]
- Structure combinatoire :
  [Domenjoud,Vuillon 12], [Berthé, Jamet, Jolivet, P. 13], [Domenjoud, P., Vuillon 14].

L'algorithme Fully Subtractive

L'algorithme **fully subtractive** :

$$\mathbf{FS}\left((a_1, a_2, \cdots, a_d)\right) = (a_1 - a_i, \cdots, a_{i-1} - a_i, a_i, a_{i+1} - a_i, \cdots, a_d - a_i)$$

où $a_i = \min(a_1, a_2, \cdots, a_d)$.

Soit $\mathcal{K} = \left\{ v \in \mathbb{R}_+^d \mid \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{FS}^n(v) = \mathbf{0} \right\}$.

Theorem ([Domenjoud, Jamet, Toutant 09])

L'épaisseur de connexité pour un vecteur normal $v \in \mathcal{K}$ est : $\dfrac{\|v\|_1}{d-1}$.

Construction guidée par Fully Subtractive

Definition ([Domenjoud,Vuillon 12],[Berthé, Jamet, Jolivet, P. 2013])

Étant donné un vecteur normal v, pour tout $n \geq 0$, on pose :

- $v_0 = v$ et $v_{n+1} = \mathbf{FS}(v_n)$.
- M_n la matrice telle que $v_{n+1} = M_n v_n$.
- a_n valeur de la plus petite coordonnée de v_n.
- δ_n l'indice de la plus petite coordonnée de v_n.
- $T_n = M_0^T \cdots M_{n-1}^T e_{\delta_n}$.

$$a_n = \langle e_{\delta_n}, v_n \rangle = \langle e_{\delta_n}, M_{n-1} \cdots M_0 v \rangle = \langle \underbrace{M_0^T \cdots M_{n-1}^T e_{\delta_n}}_{T_n}, v \rangle$$

Construction guidée par Fully Subtractive

Definition ([Domenjoud,Vuillon 12],[Berthé, Jamet, Jolivet, P. 2013])

Étant donné un vecteur normal v, pour tout $n \geq 0$, on pose :

- $v_0 = v$ et $v_{n+1} = \mathbf{FS}(v_n)$.
- M_n la matrice telle que $v_{n+1} = M_n v_n$.
- a_n valeur de la plus petite coordonnée de v_n.
- δ_n l'indice de la plus petite coordonnée de v_n.
- $T_n = M_0^T \cdots M_{n-1}^T e_{\delta_n}$.

$$a_n = \langle e_{\delta_n}, v_n \rangle = \langle e_{\delta_n}, M_{n-1} \cdots M_0 v \rangle = \langle \underbrace{M_0^T \cdots M_{n-1}^T e_{\delta_n}}_{T_n}, v \rangle$$

Si $v \in \mathcal{K}$ alors :

$$\sum_{i \geq 0} a_i = \frac{\|v\|_1}{d-1} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ \mathcal{I} \text{ fini}}} T_i \in \mathcal{P}\left(v, 0, \frac{\|v\|_1}{d-1}\right)$$

Construction guidée par Fully Subtractive

Definition

- Soit $P_0 = \{(0,0,0)\}$,
- $P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$

Theorem ([Domenjoud,Vuillon 12],[Berthé, Jamet, Jolivet, P. 13])

Pour tout $n \geq 0$, l'ensemble P_n est connexe.

Theorem ([Domenjoud, P., Vuillon 14])

Si $v \in \mathcal{K}$ alors $P_\infty = \mathcal{P}(v, 0, \frac{\|v\|_1}{d-1})$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1, 0, 0) \\
T_1 &= (-1, 1, 0) \\
T_2 &= (-1, 1, 0) \\
T_3 &= (1, -2, 1) \\
T_4 &= (1, -2, 1) \\
T_5 &= (1, 2, -2) \\
T_6 &= (1, 2, -2) \\
T_7 &= (-5, 1, 2) \\
T_8 &= (-5, 1, 2) \\
T_9 &= (9, -8, 1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1, 0, 0)\\
T_1 &= (-1, 1, 0)\\
T_2 &= (-1, 1, 0)\\
T_3 &= (1, -2, 1)\\
T_4 &= (1, -2, 1)\\
T_5 &= (1, 2, -2)\\
T_6 &= (1, 2, -2)\\
T_7 &= (-5, 1, 2)\\
T_8 &= (-5, 1, 2)\\
T_9 &= (9, -8, 1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1, 0, 0)\\
T_1 &= (-1, 1, 0)\\
T_2 &= (-1, 1, 0)\\
T_3 &= (1, -2, 1)\\
T_4 &= (1, -2, 1)\\
T_5 &= (1, 2, -2)\\
T_6 &= (1, 2, -2)\\
T_7 &= (-5, 1, 2)\\
T_8 &= (-5, 1, 2)\\
T_9 &= (9, -8, 1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1, 0, 0)\\
T_1 &= (-1, 1, 0)\\
T_2 &= (-1, 1, 0)\\
T_3 &= (1, -2, 1)\\
T_4 &= (1, -2, 1)\\
T_5 &= (1, 2, -2)\\
T_6 &= (1, 2, -2)\\
T_7 &= (-5, 1, 2)\\
T_8 &= (-5, 1, 2)\\
T_9 &= (9, -8, 1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$

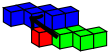
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1,0,0)\\
T_1 &= (-1,1,0)\\
T_2 &= (-1,1,0)\\
T_3 &= (1,-2,1)\\
T_4 &= (1,-2,1)\\
T_5 &= (1,2,-2)\\
T_6 &= (1,2,-2)\\
T_7 &= (-5,1,2)\\
T_8 &= (-5,1,2)\\
T_9 &= (9,-8,1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$

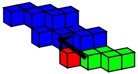


Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1, 0, 0) \\
T_1 &= (-1, 1, 0) \\
T_2 &= (-1, 1, 0) \\
T_3 &= (1, -2, 1) \\
T_4 &= (1, -2, 1) \\
T_5 &= (1, 2, -2) \\
T_6 &= (1, 2, -2) \\
T_7 &= (-5, 1, 2) \\
T_8 &= (-5, 1, 2) \\
T_9 &= (9, -8, 1)
\end{aligned}
$$



$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$

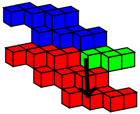
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1, 0, 0)\\
T_1 &= (-1, 1, 0)\\
T_2 &= (-1, 1, 0)\\
T_3 &= (1, -2, 1)\\
T_4 &= (1, -2, 1)\\
T_5 &= (1, 2, -2)\\
T_6 &= (1, 2, -2)\\
T_7 &= (-5, 1, 2)\\
T_8 &= (-5, 1, 2)\\
T_9 &= (9, -8, 1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$



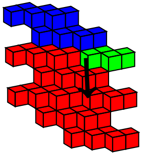
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1,0,0)\\
T_1 &= (-1,1,0)\\
T_2 &= (-1,1,0)\\
T_3 &= (1,-2,1)\\
T_4 &= (1,-2,1)\\
T_5 &= (1,2,-2)\\
T_6 &= (1,2,-2)\\
T_7 &= (-5,1,2)\\
T_8 &= (-5,1,2)\\
T_9 &= (9,-8,1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$



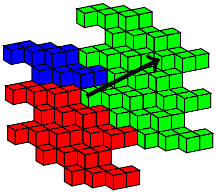
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1,0,0)\\
T_1 &= (-1,1,0)\\
T_2 &= (-1,1,0)\\
T_3 &= (1,-2,1)\\
T_4 &= (1,-2,1)\\
T_5 &= (1,2,-2)\\
T_6 &= (1,2,-2)\\
T_7 &= (-5,1,2)\\
T_8 &= (-5,1,2)\\
T_9 &= (9,-8,1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$



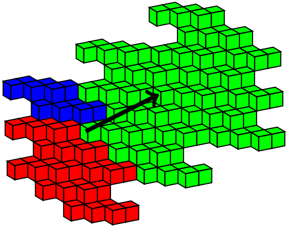
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1,0,0)\\
T_1 &= (-1,1,0)\\
T_2 &= (-1,1,0)\\
T_3 &= (1,-2,1)\\
T_4 &= (1,-2,1)\\
T_5 &= (1,2,-2)\\
T_6 &= (1,2,-2)\\
T_7 &= (-5,1,2)\\
T_8 &= (-5,1,2)\\
T_9 &= (9,-8,1)
\end{aligned}
$$

$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$



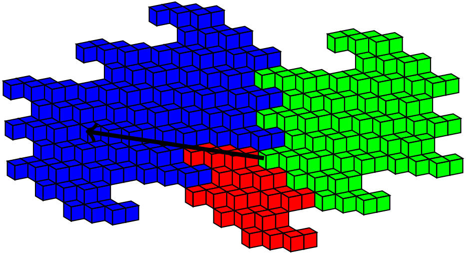
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= (1,0,0)\\
T_1 &= (-1,1,0)\\
T_2 &= (-1,1,0)\\
T_3 &= (1,-2,1)\\
T_4 &= (1,-2,1)\\
T_5 &= (1,2,-2)\\
T_6 &= (1,2,-2)\\
T_7 &= (-5,1,2)\\
T_8 &= (-5,1,2)\\
T_9 &= (9,-8,1)
\end{aligned}
$$

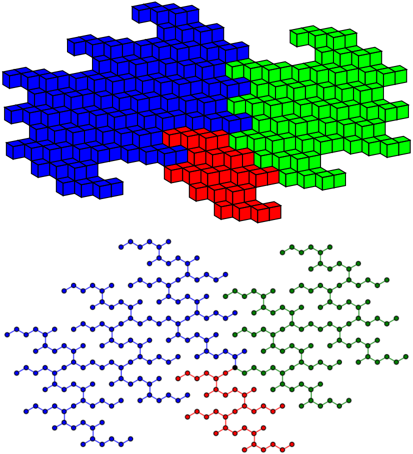
$$P_{n+1} = P_n \cup (T_n + P_n)$$



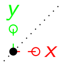
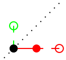
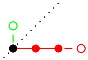
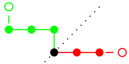
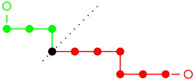
Tree structure

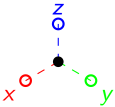
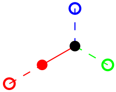
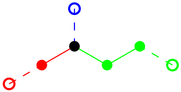
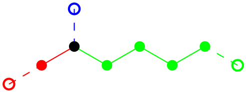
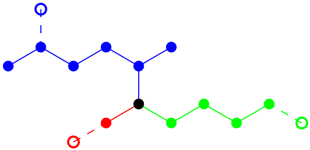
Theorem ([Domenjoud, Vuillon 12])

Le graphe d'adjacence de P_n est un arbre.



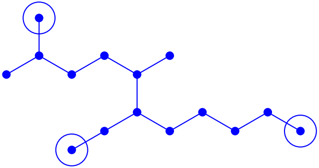
Vision unifiée

Motif	Euclide
	$(\underline{3}, 8)$
	$(\underline{3}, 5)$
	$(3, \underline{2})$
	$(\underline{1}, 2)$
	$(1, 1)$

Motif	**FS**
	$(\underline{6}, 8, 11)$
	$(6, \underline{2}, 5)$
	$(4, \underline{2}, 3)$
	$(2, 2, \underline{1})$
	$(1, 1, 1)$

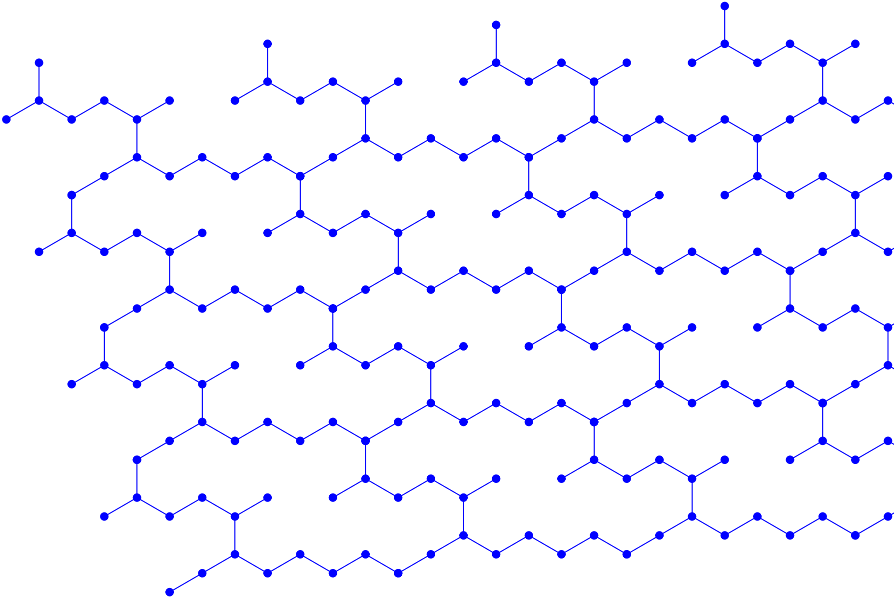
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



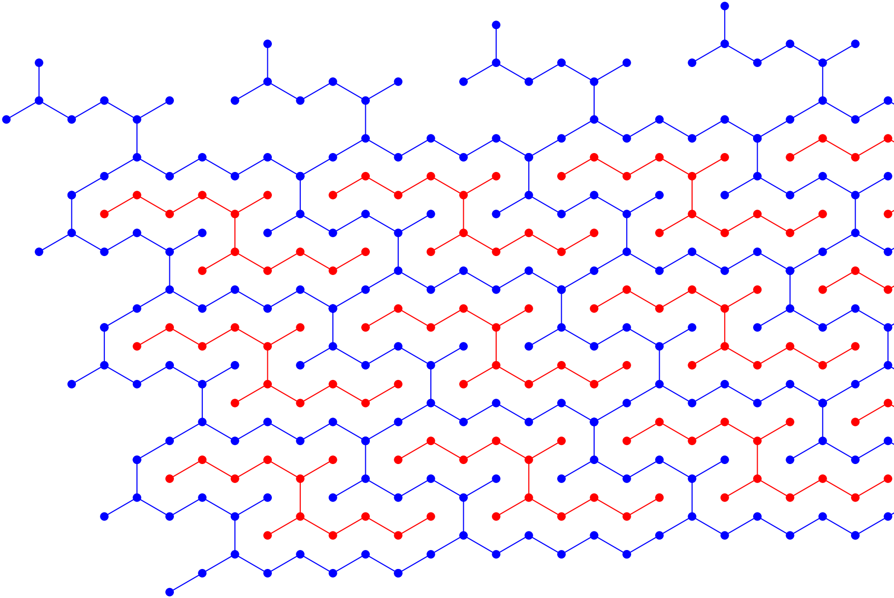
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



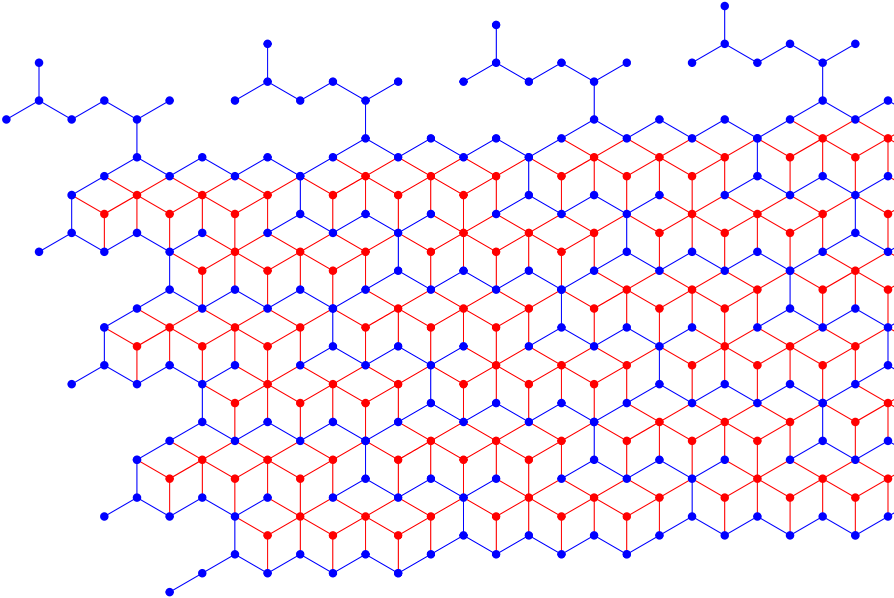
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



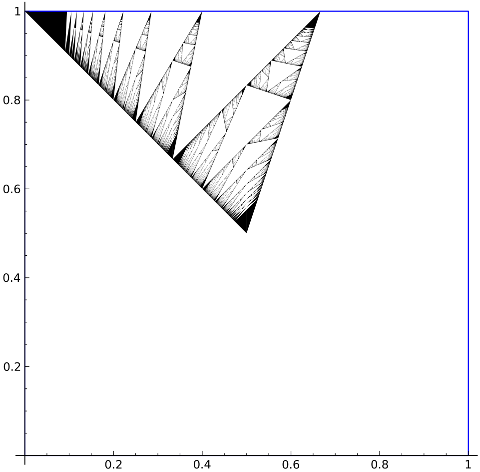
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



Theorem ([Kraaikamp, Meester 95])

L'ensemble $\mathcal{K}$ est de mesure nulle.



$\{(x/z, y/z) \mid x \leq y \leq z$ et la construction atteint $(x, y, z)\}$

La construction ne concerne que :

- les vecteurs de $\mathcal{K}$,
- les vecteurs entiers tels que FS atteint $(1, 1, 1)$.

Part III

Algorithme de reconnaissance

Problème principal

Étant donné un prédicat répondant à la question :

“Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?”

Calculer $\mathbf{N}$.

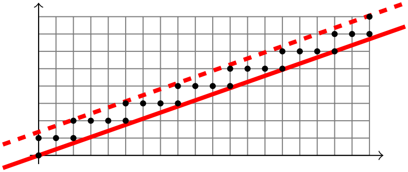
Problème principal

Étant donné un prédicat répondant à la question :

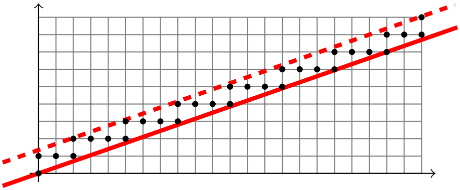
$$\text{“Est-ce que que le point entier } \mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu) \text{ ?”}$$

Calculer **N**.

- À partir de maintenant **N** est le vecteur normal recherché.
- On souhaite une approche *aussi locale que possible*.
- Sachant très bien que c'est impossible...



$\mathcal{D}((-6, 17), 0)$



$\mathcal{D}((-7, 20), 0)$

Problème principal

Étant donné un prédicat répondant à la question :

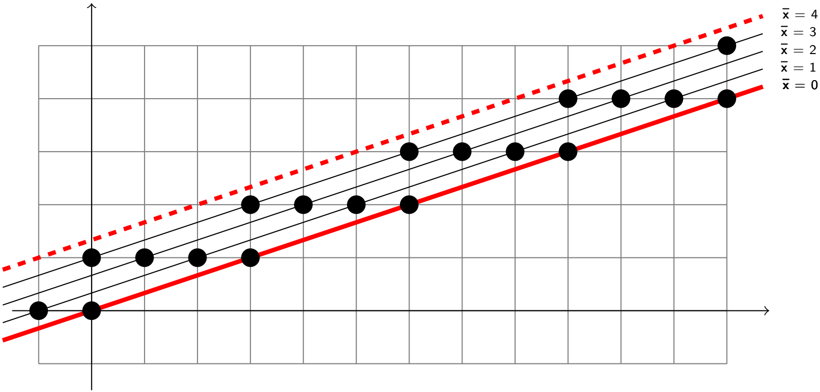
"Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?"

Calculer **N**.

- À partir de maintenant **N** est le vecteur normal recherché.
- On souhaite une approche *aussi locale que possible*.
- Sachant très bien que c'est impossible...
- Hypothèse :
  - On connait une borne à $\|\mathbf{N}\|_\infty$.
  - $\mathbf{N} \in \mathbb{N}_+^3$.
  - $\mathrm{pgcd}(\mathbf{N}) = 1$.

Structure d'une droite discrète rationnelle

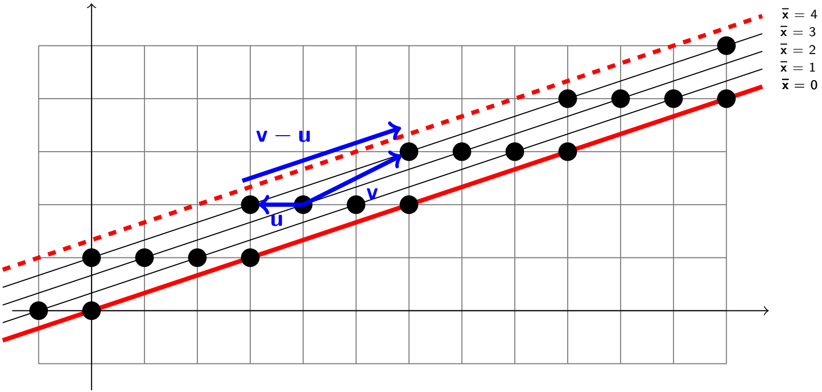
- Notation : $\bar{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle$ est la hauteur du point $\mathbf{x}$,
  Exemple : $\mathcal{D}((-3,1),0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < 4\}$,



Structure d'une droite discrète rationnelle

- Notation : $\overline{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle$ est la hauteur du point $\mathbf{x}$,

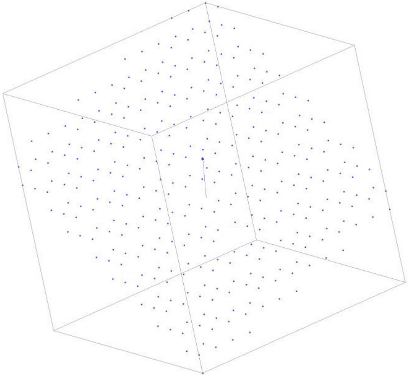
  Exemple : $\mathcal{D}((-3,1),0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \overline{\mathbf{x}} < 4\}$,

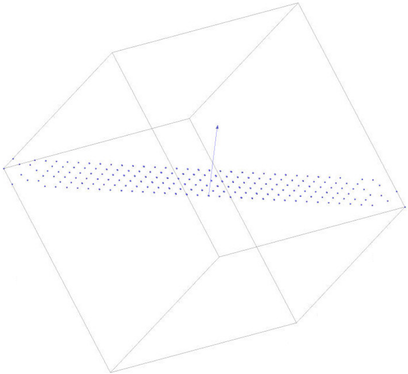


- Vecteurs de Bezout : $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = 1$,
- Si $\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}\right) = 1$ alors $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ engendre $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid \overline{\mathbf{x}} = 0\}$.

Structure d'un plan discret

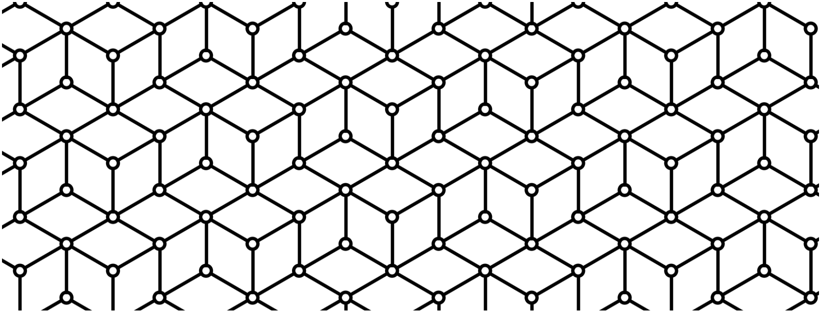
$$\mathbf{N} = (1, 2, 3), \quad \mathcal{P}(N, 0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$





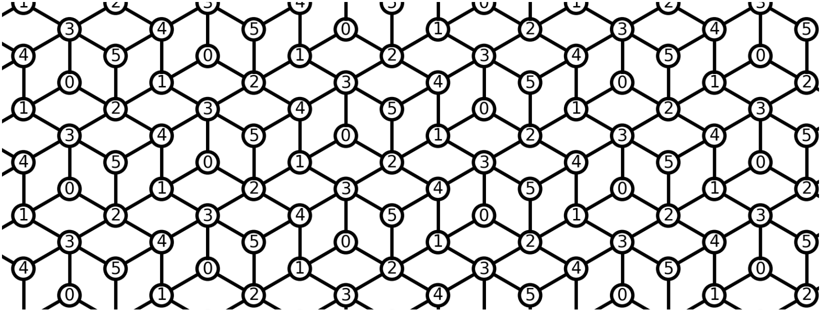
Structure d'un plan discret

$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$



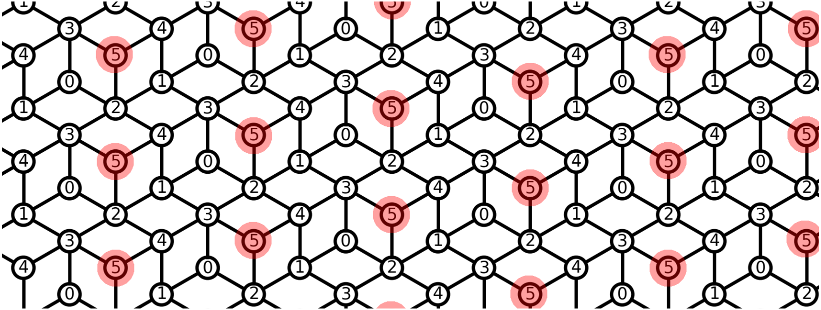
Structure d'un plan discret

$\mathbf{N} = (1, 2, 3), \quad \mathcal{P}(N, 0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$



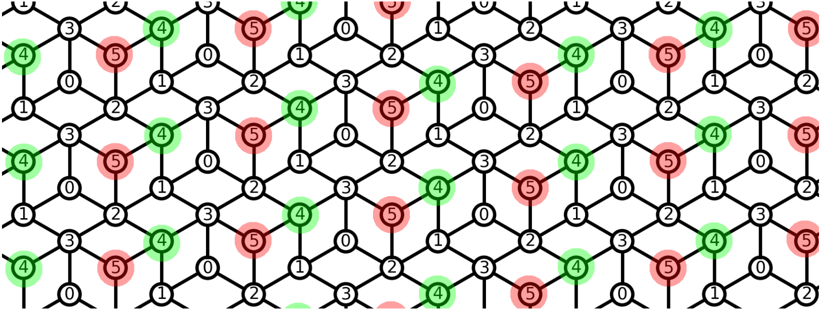
Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



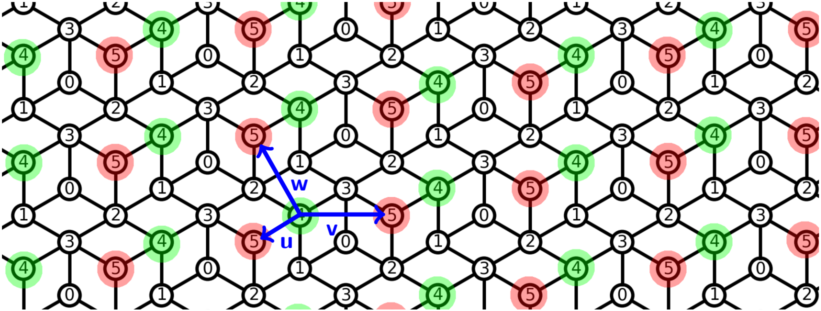
Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \overline{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \le \overline{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



Si $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$ (vecteurs de Bezout) et $\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}\right) = 1$ alors

- $(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ et $(\mathbf{w}-\mathbf{u})$ engendrent $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid \overline{\mathbf{x}} = 0\}$,
- $(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \times (\mathbf{w}-\mathbf{u}) = \pm\mathbf{N}$

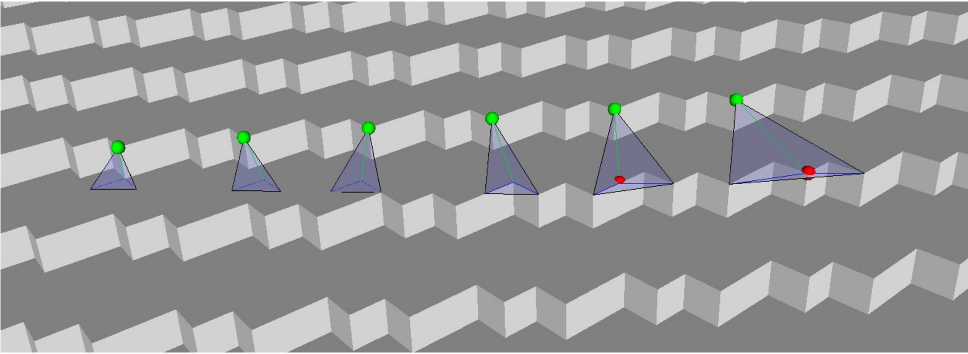
Problème principal

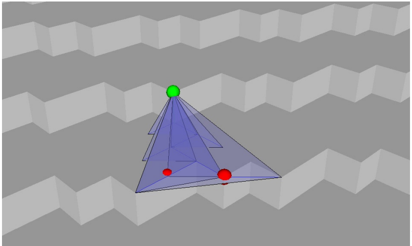
Étant donné un prédicat répondant à la question :

"Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?"

Calculer trois vecteurs de Bezout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ linéairement indépendants.

L'algorithme en une image





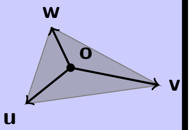
Élément de base de l'algorithme

Entrée :

- Un prédicat P pour le plan discret $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$,
- Un point $\mathbf{x} \in P$.

Definition (Tétraèdre)

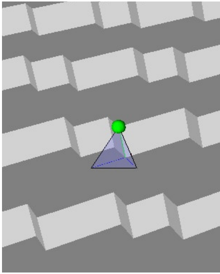
- Un tétraèdre est un quadruplet $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{Z}^3)^4$.
- Un tétraèdre est dit valide si :
  - $\mathbf{o}, \mathbf{o}+\mathbf{u}, \mathbf{o}+\mathbf{v}, \mathbf{o}+\mathbf{w} \in P$,
  - $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = 1$,
  - $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} > 0$,



- La normale du tétraèdre $\mathfrak{S}$ est le vecteur $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) := (\mathbf{v}-\mathbf{u}) \times (\mathbf{w}-\mathbf{u})$

- Initialisation : $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$. Il faut pour cela trouver un "coin" $\mathbf{o}$ où se positionner pour commencer.
- Sortie : $\mathfrak{S}$ est valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$.

Élément de base de l'algorithme

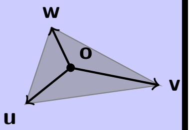


Entrée :

- Un prédicat P pour le plan discret $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$,
- Un point $\mathbf{x} \in P$.

Definition (Tétraèdre)

- Un tétraèdre est un quadruplet $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{Z}^3)^4$.
- Un tétraèdre est dit valide si :
  - $\mathbf{o}, \mathbf{o} + \mathbf{u}, \mathbf{o} + \mathbf{v}, \mathbf{o} + \mathbf{w} \in P$,
  - $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = 1$,
  - $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} > 0$,



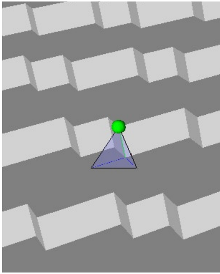
- La normale du tétraèdre $\mathfrak{S}$ est le vecteur $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) := (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} - \mathbf{u})$

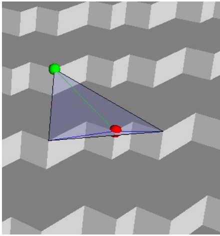
- Initialisation : $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$. Il faut pour cela trouver un "coin" $\mathbf{o}$ où se positionner pour commencer.
- Sortie : $\mathfrak{S}$ est valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$.

Élément de base de l'algorithme

Entrée :

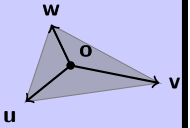
- Un prédicat P pour le plan discret $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$,
- Un point $\mathbf{x} \in P$.





Definition (Tétraèdre)

- Un tétraèdre est un quadruplet $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{Z}^3)^4$.
- Un tétraèdre est dit valide si :
  - $\mathbf{o}, \mathbf{o}+\mathbf{u}, \mathbf{o}+\mathbf{v}, \mathbf{o}+\mathbf{w} \in P$,
  - $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = 1$,
  - $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} > 0$,
- La normale du tétraèdre $\mathfrak{S}$ est le vecteur $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) := (\mathbf{v}-\mathbf{u}) \times (\mathbf{w}-\mathbf{u})$



- Initialisation : $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$. Il faut pour cela trouver un "coin" $\mathbf{o}$ où se positionner pour commencer.
- Sortie : $\mathfrak{S}$ est valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$.

Opérations

Definition

Une opération est une fonction $\lambda : (\mathbb{Z}^3)^4 \to (\mathbb{Z}^3)^4$ telle qu'étant donné $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda((\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, il existe une matrice M_λ satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix} = M_\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Definition

Une opération λ est valide sur un tétraèdre valide $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ si

- $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda(\mathfrak{S})$ est un tétraèdre valide,
- $\overline{\mathbf{o}}' > \overline{\mathbf{o}}$,

Opérations

Definition

Une opération est une fonction $\lambda : (\mathbb{Z}^3)^4 \to (\mathbb{Z}^3)^4$ telle qu'étant donné $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda((\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, il existe une matrice M_λ satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix} = M_\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Definition

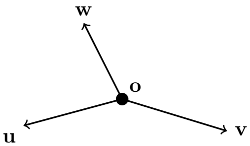
Une opération λ est valide sur un tétraèdre valide $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ si

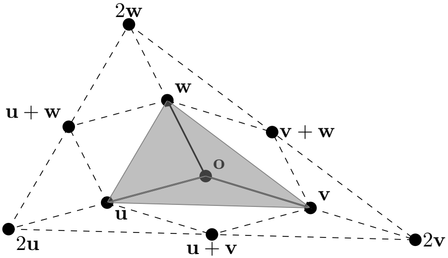
- $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda(\mathfrak{S})$ est un tétraèdre valide,
- $\overline{\mathbf{o}}' > \overline{\mathbf{o}}$,

La terminaison de l'algorithme est triviale car $\overline{\mathbf{o}}$ croit à chaque itération et $\mathbf{o} \in P$ implique $0 \leq \overline{\mathbf{o}} + \mu < \|\mathbf{N}\|_1$.

Opérations locale

Ne considèrent que les 6 points $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 2\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$.



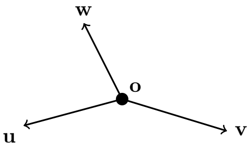


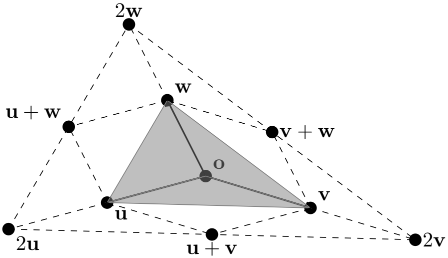
(abus de notation : $2\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{o} + 2\mathbf{u}$)

> Toutes les opérations sont exprimées par rapport à une permutation σ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Opérations locale

Ne considèrent que les 6 points $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 2\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$.





(abus de notation : $2\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{o} + 2\mathbf{u}$)

Toutes les opérations sont exprimées par rapport à une permutation σ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

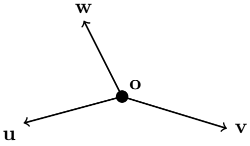
Lemma

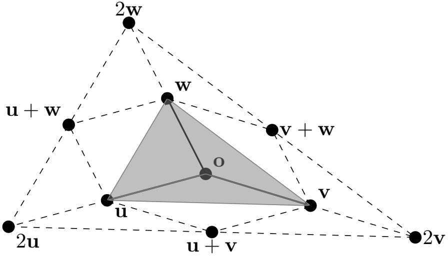
Étant donné $\mathbf{o} \in P$ *et deux vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *tel que* $\overline{\mathbf{x}} > 0$ *et* $\overline{\mathbf{y}} > 0$,

$$\mathbf{o} + \mathbf{x} \in P \text{ et } \mathbf{o} + \mathbf{y} \notin P \implies$$

Opérations locale

Ne considèrent que les 6 points $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 2\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$.





(abus de notation : $2\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{o} + 2\mathbf{u}$)

Toutes les opérations sont exprimées par rapport à une permutation σ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Lemma

Étant donné $\mathbf{o} \in P$ et deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tel que $\overline{\mathbf{x}} > 0$ et $\overline{\mathbf{y}} > 0$,

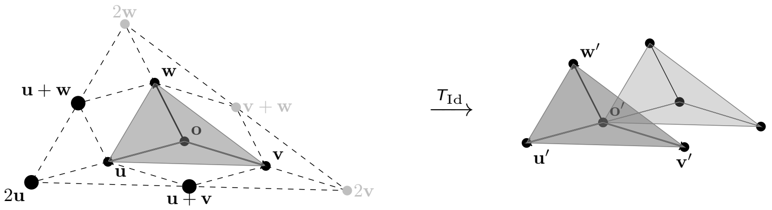
$$\mathbf{o} + \mathbf{x} \in P \text{ et } \mathbf{o} + \mathbf{y} \notin P \implies \overline{\mathbf{x}} < \overline{\mathbf{y}}$$

Translation

- Préconditions pour T_{Id} :
  - $\{\mathbf{o} + 2\mathbf{u}, \mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{w}\} \in P$.

- Opération T_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} \end{aligned} \qquad M_{T_{\mathrm{Id}}} := Id$$



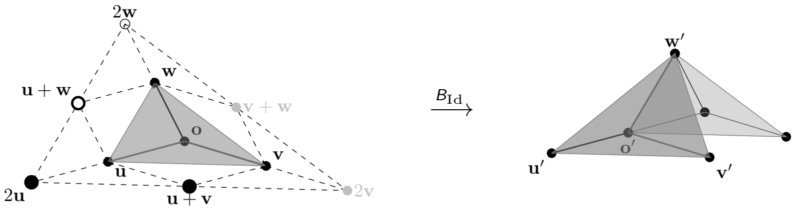
Lemma

T_σ est valide sur un tétraèdre satisfaisant ses préconditions.

Brun

- Préconditions pour B_{Id} :
  - $\{\mathbf{o}+2\mathbf{u}, \mathbf{o}+\mathbf{u}+\mathbf{v}\} \in P$
  - $\{\mathbf{o}+\mathbf{u}+\mathbf{w}\} \notin P$.
- Opération B_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o}+\mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w}-\mathbf{u} \end{aligned} \qquad M_{B_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



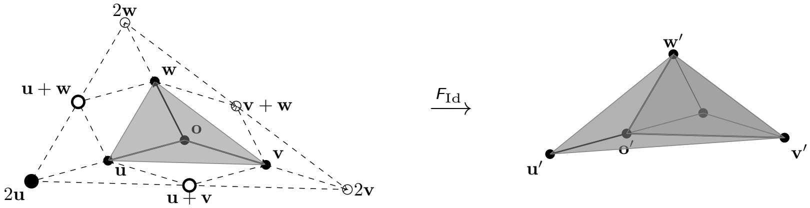
Lemma

B_σ est valide sur un tétraèdre satisfaisant ses préconditions.

Fully subtractive

- Préconditions pour F_{Id} :
  - $\{\mathbf{o} + 2\mathbf{u}\} \in P$,
  - $\{\mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{w}\} \notin P$.
- Opération F_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned} \qquad M_{F_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

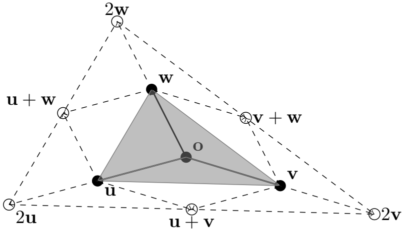


Lemma

F_σ est valide sur un tétraèdre satisfaisant ses préconditions.

Opérations généralisées

- Les opération généralisées ne sont donc considérées que dans le cas où $\mathbf{o} + 2\mathbf{u}$, $\mathbf{o} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{o} + 2\mathbf{w}$, $\mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{o} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ sont tous à l'extérieur de P.

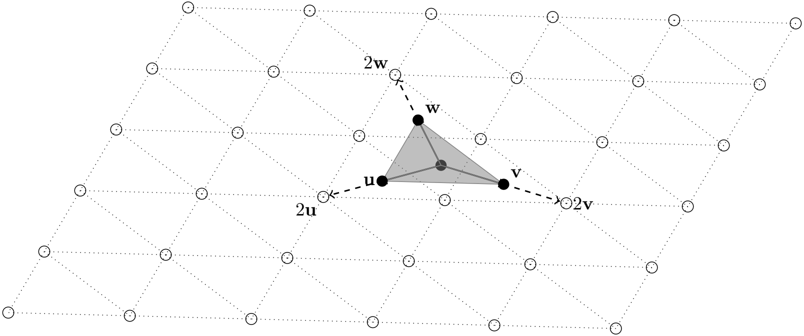


Lattice au-dessus du tétraèdre

Definition

- $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$
- tétraèdre de coordonnées, :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{L}_{\mathbf{u}} : & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w})) \end{array}$$

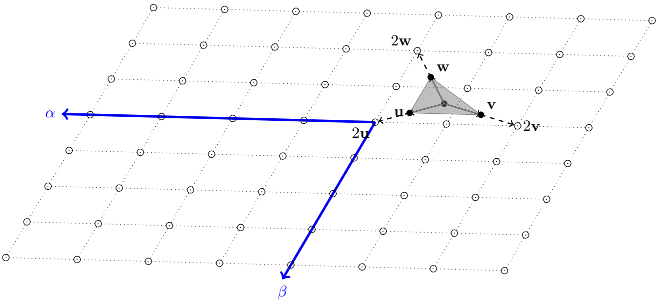


Lattice au-dessus du tétraèdre

Definition

- $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$
- tétraèdre de coordonnées, :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{L}_{\mathbf{u}} : & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w})) \end{array}$$

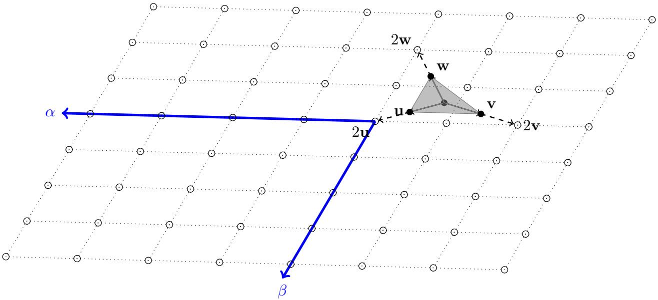


Lattice au-dessus du tétraèdre

Definition

- $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$
- tétraèdre de coordonnées, étant donné une permutation σ :

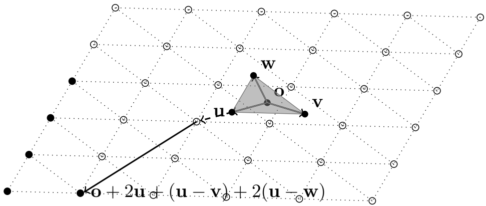
$$\begin{array}{rccl} \mathbb{L}_\sigma : & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathbf{o} + 2\sigma(\mathbf{u}) + \alpha(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{v})) + \beta(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{w})) \end{array}$$



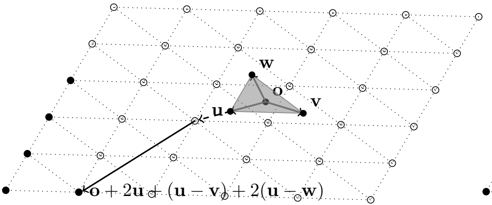
Fully subtractive généralisé

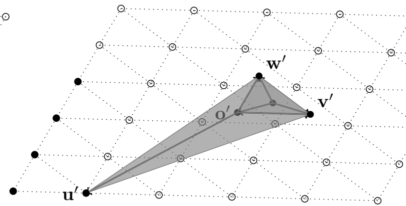
Opération définie pour une paire $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_+$ tels que $\alpha + \beta \geq 1$.

- Préconditions pour $F_{\mathrm{Id}}^{\alpha,\beta}$:
  - Aucune opération locale n'est valide.
  - $\mathbb{L}_{\mathrm{Id}}(\alpha, \beta) \in P$,
  - $\mathbb{L}_{\mathrm{Id}}(\alpha - 1, \beta) \notin P$ et $\mathbb{L}_{\mathrm{Id}}(\alpha, \beta - 1) \notin P$.



Fully subtractive généralisé





- Opération $F_{\mathrm{Id}}^{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$M_{F_{\mathrm{Id}}^{\alpha,\beta}} := \begin{bmatrix} 1+\alpha+\beta & -\alpha & -\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

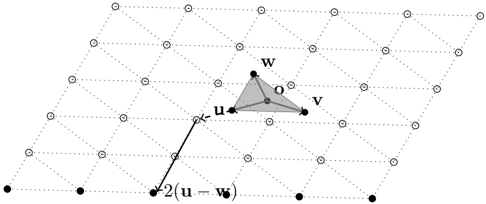
Lemma

$F_{\sigma}^{\alpha,\beta}$ est valide sur un tétraèdre satisfaisant ses préconditions.

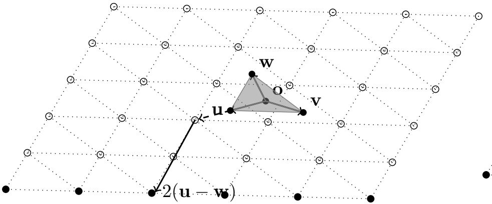
Brun généralisé

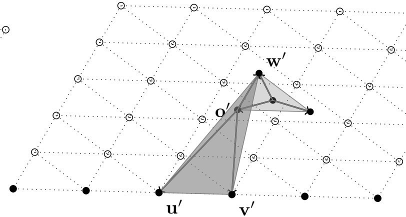
Opération définie pour un entier $\beta \geq 1$.

- Préconditions pour B^{β}_{Id} :
  - Aucune opération locale n'est valide.
  - Aucune opération $F_{\sigma}^{\alpha,\beta}$ n'est valide.
  - $\mathbb{L}_{\sigma}(0,\beta), \mathbb{L}_{\sigma}(-1,\beta) \in P$,



Brun généralisé





- Opération B^{β}_{Id}:

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned}
\qquad
M_{B^{\beta}_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & -\beta \\ \beta & 1 & -\beta \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Lemma

B^{β}_{σ} est valide sur un tétraèdre satisfaisant ses préconditions.

L'algorithme

Input: Un prédicat P pour $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$ et un point $\mathbf{o}$ tel que $P(\mathbf{o})$, $P(\mathbf{o} + e_1)$, $P(\mathbf{o} + e_2)$, $P(\mathbf{o} + e_3)$;

$\mathfrak{S} \leftarrow (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$;

arreter $\leftarrow$`Faux` ;

while ***non*** *arreter* **do**

  if *il exites une opération valide* λ **then**

    $\mathfrak{S} \leftarrow \lambda(\mathfrak{S})$;

  else

    arreter $\leftarrow$ `Vrai`;

return $\mathfrak{S}$;

- L'algorithme termine car $\overline{\mathbf{o}}$ est un entier borné qui augmente à chaque itération.
- Quand il termine, on a $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$.

Validité de l'algorithme

Theorem

Soit $\mathfrak{S}$ un tétraèdre valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$, alors $\overline{\mathbf{u}} = 1$ et $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) = \mathbf{N}$.

Preuve : soit $M = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{1} = e_1 + e_2 + e_3$.

- On pose $k = \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$,

$$M\mathbf{N} = k\mathbf{1} \implies \mathbf{N} = kM^{-1}\mathbf{1}.$$

  On a bien, $k = 1$.

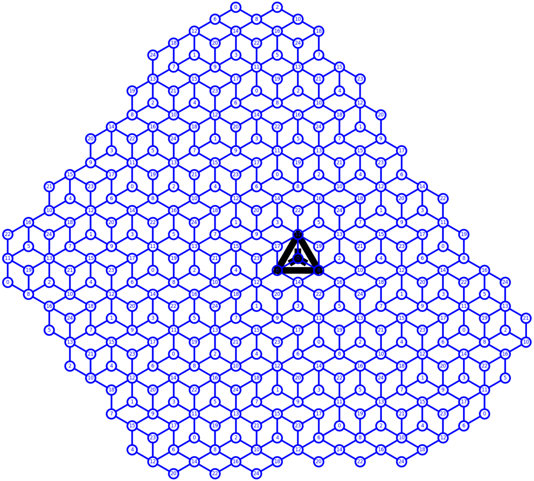
- À chaque étape de l'algorithme on a :

$$\langle \hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}), \mathbf{u} \rangle = \langle \hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}), \mathbf{v} \rangle = \langle \hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}), \mathbf{w} \rangle = 1$$

  Et donc, $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$ implique $M\mathbf{N} = M\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S})$.

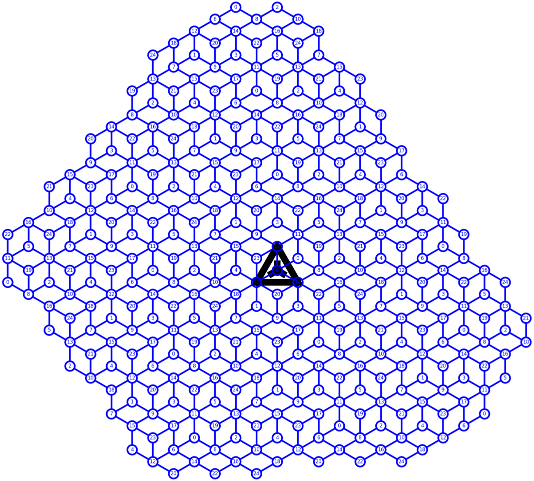
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



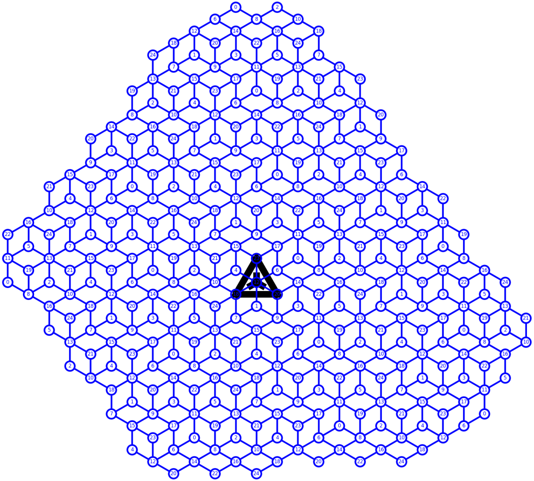
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



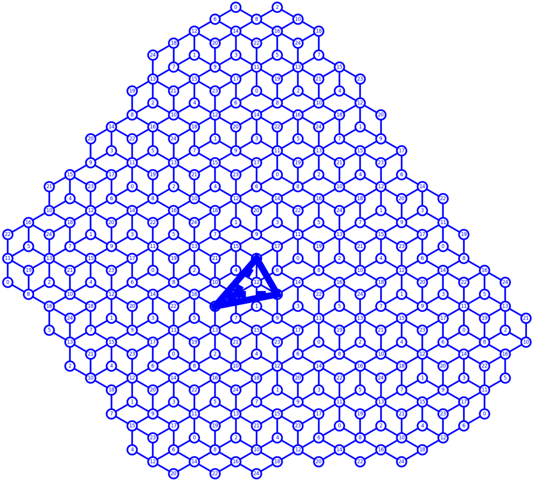
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



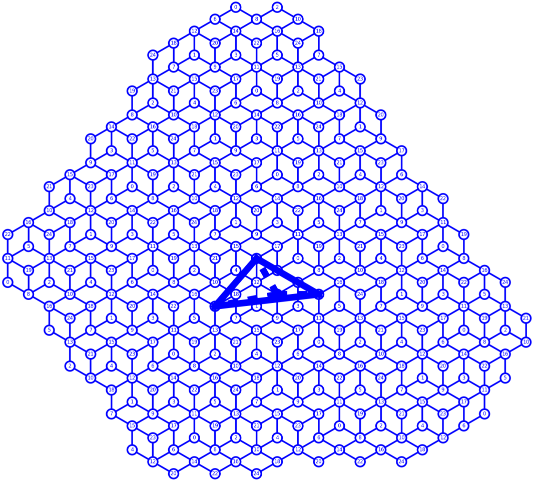
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



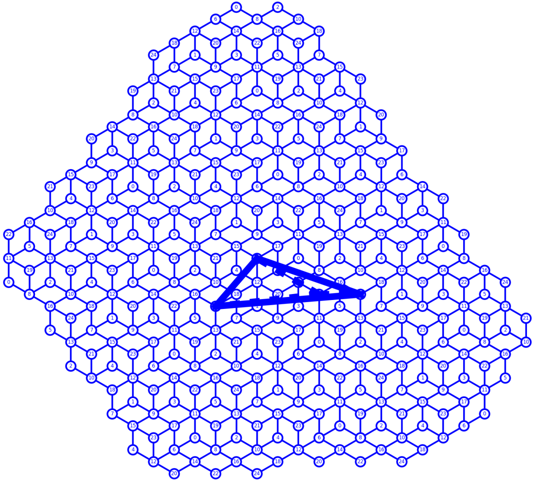
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



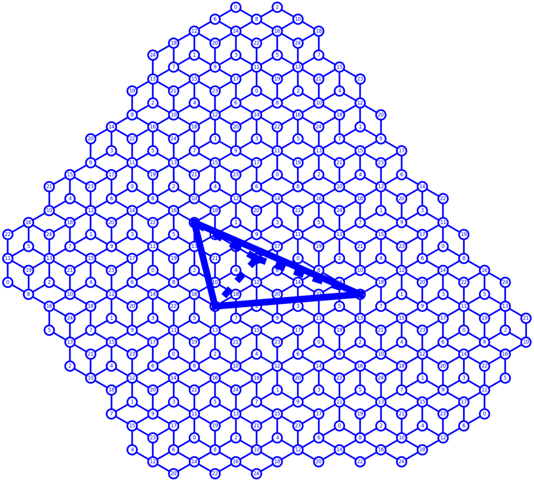
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



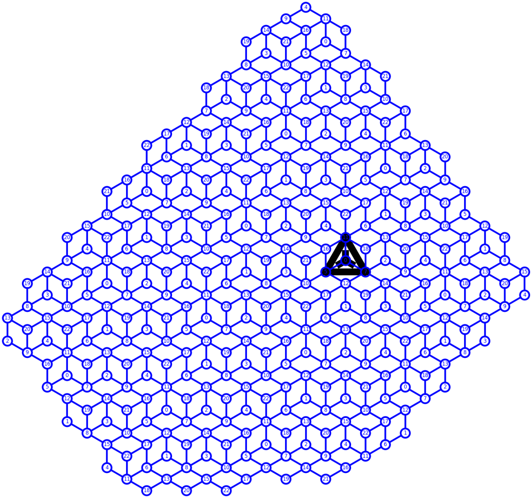
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



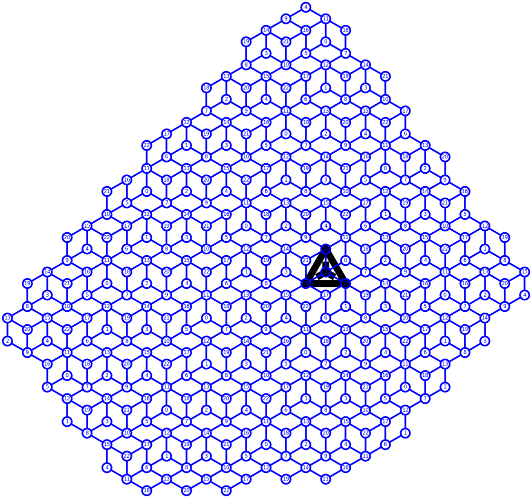
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



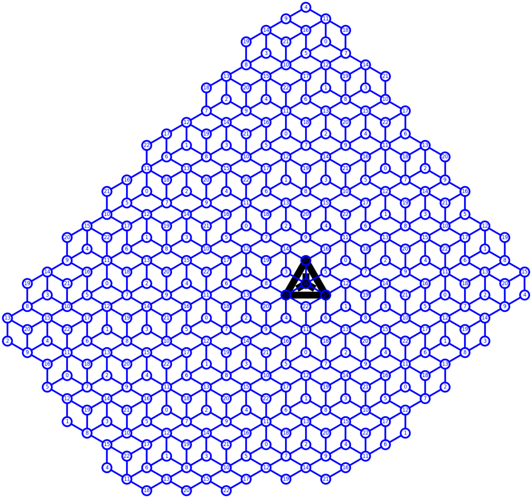
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



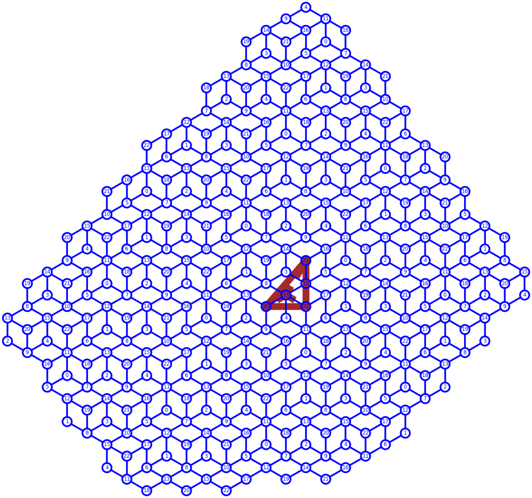
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



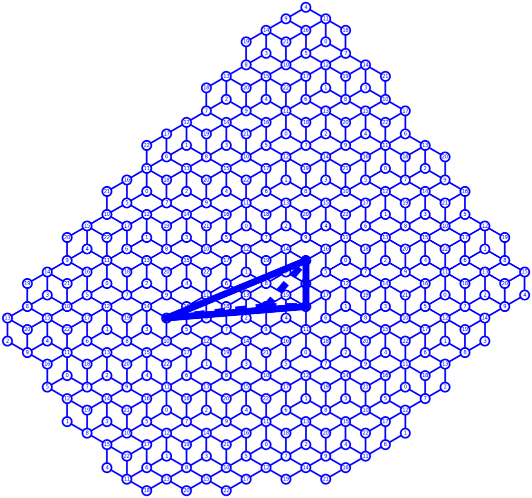
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



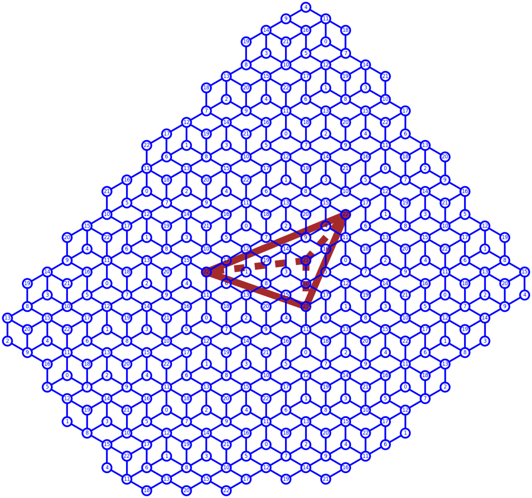
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},

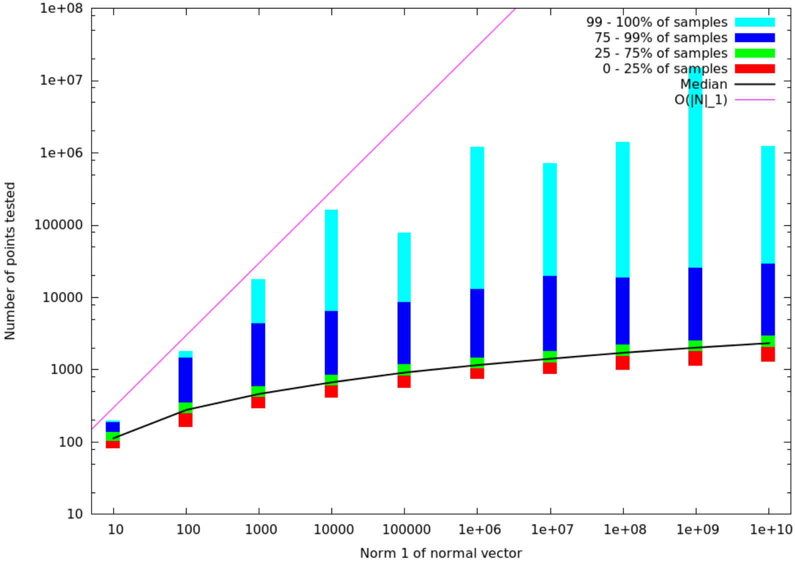


Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



Nombre de points testés



Version arithmétique

- On pose $\mathbf{N} = (a, b, c)$,
- À l'initialisation, on a $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$, ainsi, lorsqu'on compare $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}}$, on compare a, b, c.

Version arithmétique

- On pose $\mathbf{N} = (a, b, c)$,
- À l'initialisation, on a $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$, ainsi, lorsqu'on compare $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}}$, on compare a, b, c.
- Idée : réinterpréter l'algorithme de reconnaissance uniquement en fonction de a, b, c et $d = \|\mathbf{N}\|_1 - \overline{\mathbf{o}}$.
- Pour simplifier, on considère la version triée :

$$a \leq b \leq c < d.$$

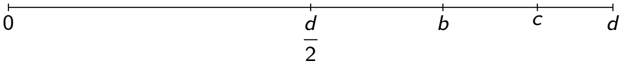
Version arithmétique

- Si $a = b = c$ alors STOP.
- Sinon si $a + c < d$ alors Translation : $(a, b, c, d) \leftarrow (a, b, c, d - a)$
- Sinon si $a + b < d$ alors Brun : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b, c - a, d - a)$
- Sinon si $2a < d$ alors FS : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b - a, c - a, d - a)$
- Sinon
  - On pose :
    - $\Gamma(x) = \dfrac{d}{x+1} + c\dfrac{x-1}{x+1}$,
    - β tel que : $\Gamma(\beta) \leq a < \Gamma(\beta + 1)$.
  - Si $a \neq b$ alors FS généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b - a, c - a, d - a)$$

  - Sinon si $a == b$ alors Brun généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b + \beta(a - c), c - a, d - a)$$



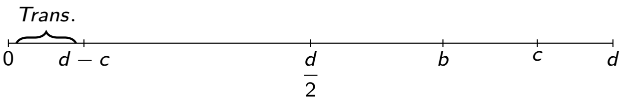
Version arithmétique

- Si $a = b = c$ alors STOP.
- Sinon si $a + c < d$ alors Translation : $(a, b, c, d) \leftarrow (a, b, c, d - a)$
- Sinon si $a + b < d$ alors Brun : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b, c - a, d - a)$
- Sinon si $2a < d$ alors FS : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b - a, c - a, d - a)$
- Sinon
  - On pose :
    - $\Gamma(x) = \dfrac{d}{x+1} + c\dfrac{x-1}{x+1}$,
    - β tel que : $\Gamma(\beta) \leq a < \Gamma(\beta + 1)$.
  - Si $a \neq b$ alors FS généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b - a, c - a, d - a)$$

  - Sinon si $a == b$ alors Brun généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b + \beta(a - c), c - a, d - a)$$



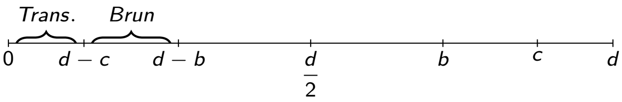
Version arithmétique

- Si $a = b = c$ alors STOP.
- Sinon si $a + c < d$ alors Translation : $(a, b, c, d) \leftarrow (a, b, c, d - a)$
- Sinon si $a + b < d$ alors Brun : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b, c - a, d - a)$
- Sinon si $2a < d$ alors FS : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b - a, c - a, d - a)$
- Sinon
  - On pose :
    - $\Gamma(x) = \dfrac{d}{x+1} + c\dfrac{x-1}{x+1}$,
    - β tel que : $\Gamma(\beta) \leq a < \Gamma(\beta + 1)$.
  - Si $a \neq b$ alors FS généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b - a, c - a, d - a)$$

  - Sinon si $a == b$ alors Brun généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b + \beta(a - c), c - a, d - a)$$



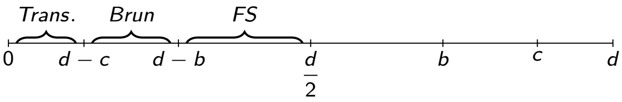
Version arithmétique

- Si $a = b = c$ alors STOP.
- Sinon si $a + c < d$ alors Translation : $(a, b, c, d) \leftarrow (a, b, c, d - a)$
- Sinon si $a + b < d$ alors Brun : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b, c - a, d - a)$
- Sinon si $2a < d$ alors FS : $(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a, b - a, c - a, d - a)$
- Sinon
  - On pose :
    - $\Gamma(x) = \dfrac{d}{x+1} + c\dfrac{x-1}{x+1}$,
    - β tel que : $\Gamma(\beta) \leq a < \Gamma(\beta + 1)$.
  - Si $a \neq b$ alors FS généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b - a, c - a, d - a)$$

  - Sinon si $a == b$ alors Brun généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \textbf{sort}(a + \beta(a - c), b + \beta(a - c), c - a, d - a)$$



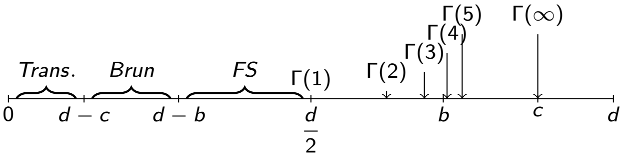
Version arithmétique

- Si $a = b = c$ alors STOP.
- Sinon si $a + c < d$ alors Translation : $(a, b, c, d) \leftarrow (a, b, c, d - a)$
- Sinon si $a + b < d$ alors Brun : $(a, b, c, d) \leftarrow \mathbf{sort}(a, b, c - a, d - a)$
- Sinon si $2a < d$ alors FS : $(a, b, c, d) \leftarrow \mathbf{sort}(a, b - a, c - a, d - a)$
- Sinon
  - On pose :
    - $\Gamma(x) = \dfrac{d}{x+1} + c\dfrac{x-1}{x+1}$,
    - β tel que : $\Gamma(\beta) \leq a < \Gamma(\beta + 1)$.
  - Si $a \neq b$ alors FS généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \mathbf{sort}(a + \beta(a - c), b - a, c - a, d - a)$$

  - Sinon si $a == b$ alors Brun généralisé :

$$(a, b, c, d) \leftarrow \mathbf{sort}(a + \beta(a - c), b + \beta(a - c), c - a, d - a)$$



Fin