Étude des plans et hyperplans discrets

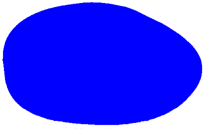
Xavier Provençal
pour l'équipe LIMD

LAMA
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie

Motivations : analyse d'images

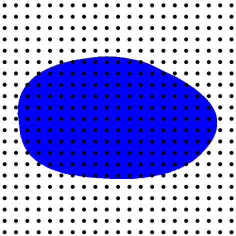
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



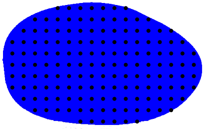
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



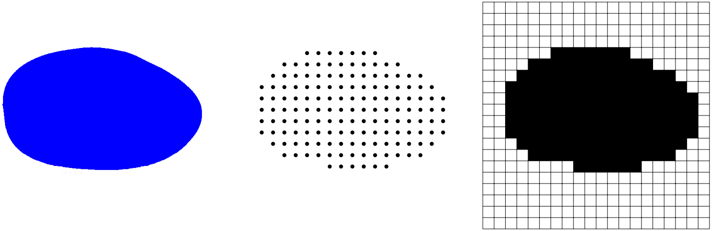
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



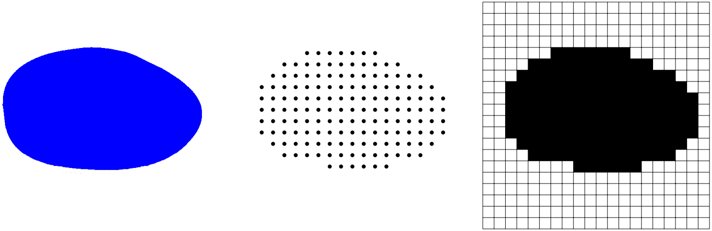
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.

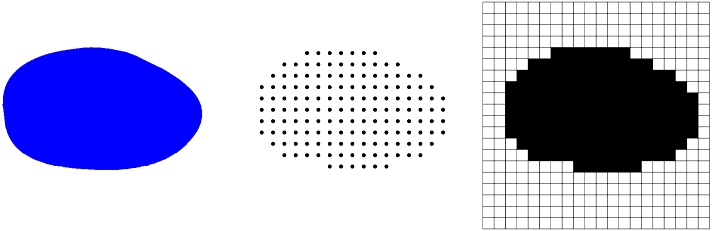


Étant donné $\mathrm{Dig}(P)$, que peut-on dire de P ?

- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- etc.

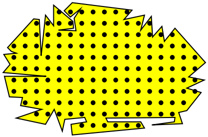
Discrétisation

Discrétisation : $\mathrm{Dig}(P) = P \cap \mathbb{Z}^d$.



Étant donné $\mathrm{Dig}(P)$, que peut-on dire de P ?

- Convexité ?
- Aire ?
- Périmètre ?
- Courbure ?
- etc.



Un outil pour le cas 2D :

- **Segments de droites discrètes.**

Droite discrète arithmétique

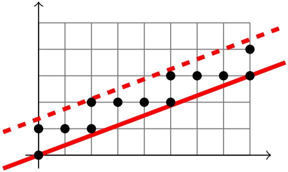
Definition (Reveillès (1991), Kovalev (1990))

La **droite discrète arithmétique** standard est :

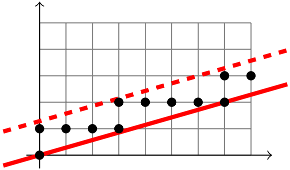
$$\mathcal{D}((a,b),\mu) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \langle (a,b),(x,y)\rangle + \mu < \|(a,b)\|_1\}$$

où

- (a,b) est le **vecteur normal**,
- $-b/a$ est la **pente**,
- μ est le **décalage**.



$\mathcal{D}((-3,8),0)$

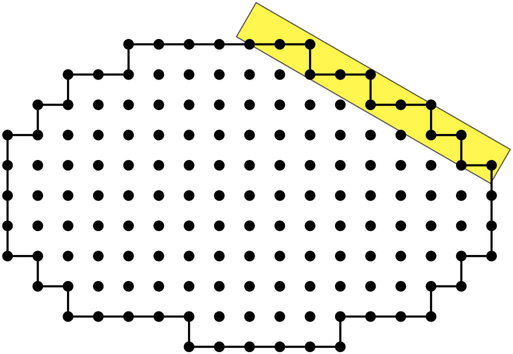


$\mathcal{D}((-2,7),0)$

Segments de droite discrète

Definition

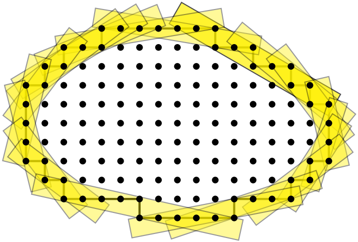
Un **Segment de droite discrète** est un sous-ensemble fini et connexe d'une droite discrète.



Couverture tangentielle

Definition ([Feschet, Tougne 99])

La **couverture tangentielle** d'une forme discrète est la liste des segments maximaux formés par son bord.



Theorème ([Debled-Rennesson, Reveillès 1995][Lachaud, Vialard, de Vieilleville 2007])

Le calcul de la couverture tangentielle prend un temps dans $\mathcal{O}(n)$ où n est le nombre de points sur le bord de la forme.

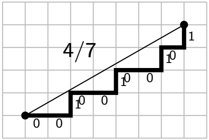
Applications de la couverture tangentielle :

- Teste de convexité [Debled-Rennesson, Reiter-Doerksen 04]
- Estimation de longueur [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Estimation de courbure [Lachaud, Kerautret, Naegel 08]
- Estimation de tangente [Feschet, Tougne 99], [Lachaud, de Vieilleville 07]
- Détection de bruit automatique [Lachaud, Kerautret 12]

Une structure décrite par les fractions continues

Definition ([Christoffel 1875])

Un mot de **Christoffel** code le chemin discret juste en dessous du segment joignant deux points entiers consécutifs le long d'une droite de pente positive.

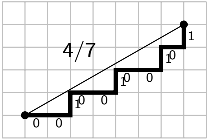


$c_{4/7} = 00100100101.$

Une structure décrite par les fractions continues

Definition ([Christoffel 1875])

Un mot de **Christoffel** code le chemin discret juste en dessous du segment joignant deux points entiers consécutifs le long d'une droite de pente positive.

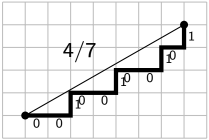


$c_{4/7} = 00100100101.$

Une structure décrite par les fractions continues

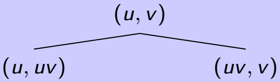
Definition ([Christoffel 1875])

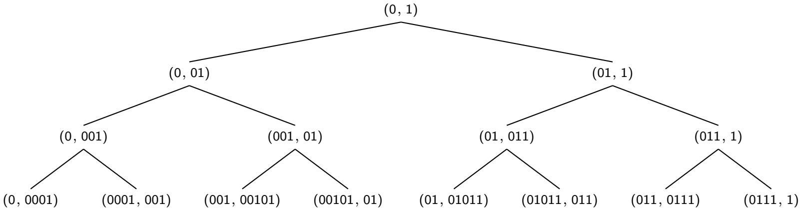
Un mot de **Christoffel** code le chemin discret juste en dessous du segment joignant deux points entiers consécutifs le long d'une droite de pente positive.



$c_{4/7} = 00100100101.$

L'**arbre de Christoffel** est l'arbre obtenu à partir de $(0,1)$, en utilisant la règle :

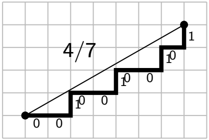




Une structure décrite par les fractions continues

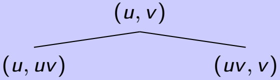
Definition ([Christoffel 1875])

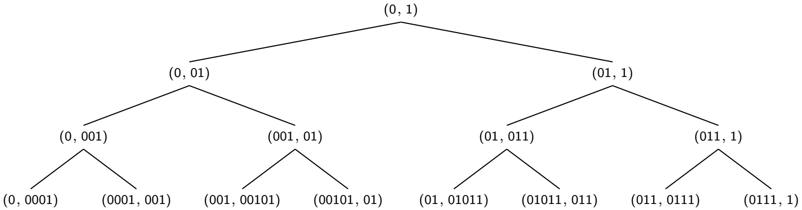
Un mot de **Christoffel** code le chemin discret juste en dessous du segment joignant deux points entiers consécutifs le long d'une droite de pente positive.



$c_{4/7} = 00100100101.$

L'**arbre de Christoffel** est l'arbre obtenu à partir de $(0,1)$, en utilisant la règle :



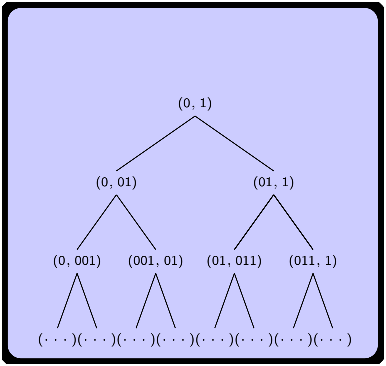


Theorème

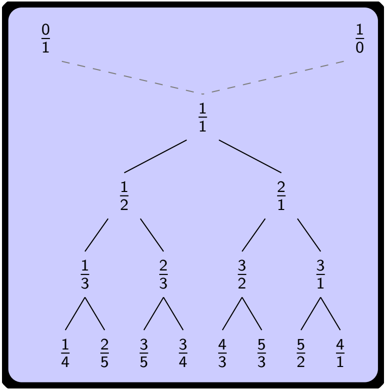
Les sommets de l'arbre de Christoffel sont en bijection avec les mots de Christoffel.

Stern-Brocot

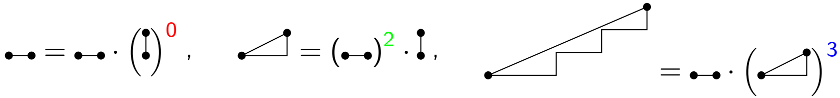
Arbre de Christoffel



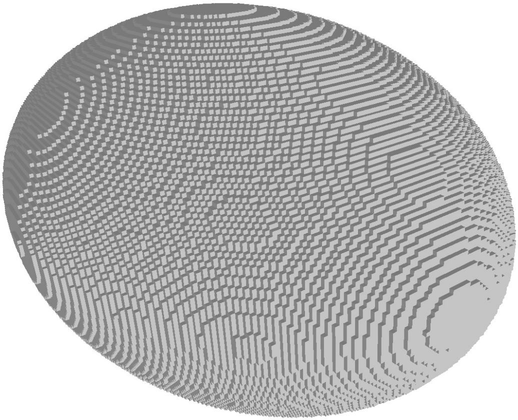
Arbre de Stern-Brocot.



Structure decrite par le developpement en fraction continue de la pente.
Exemple : $3/7 = [\ \color{red}{0}\ ;\ \color{green}{2},\ \color{blue}{3}\ ]$



Plan discrets en 3D



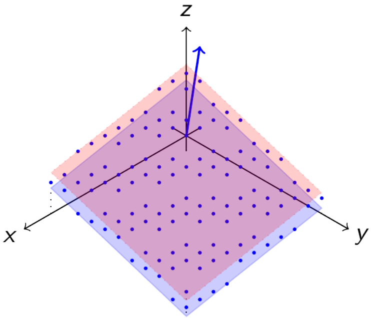
Plan discrets arithmétique

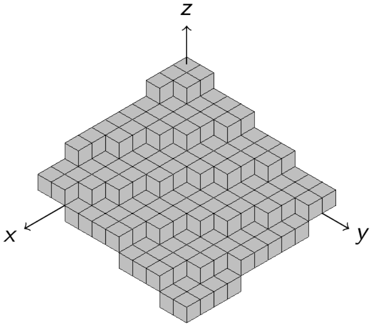
Definition ([Reveillès 91],[Forchhammer 89])

Le plan discret de **vecteur normal** $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et d'**épaisseur** θ.

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$

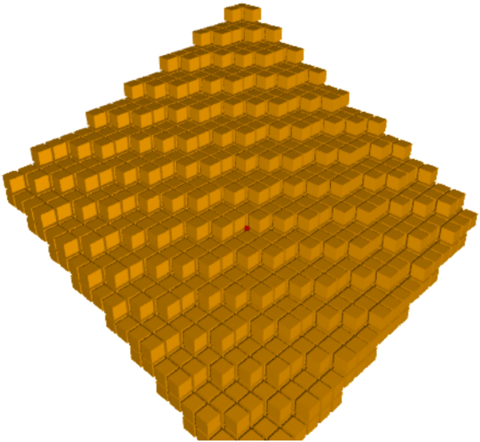
Dans le cas où $\theta = \|\boldsymbol{v}\|_1$ alors $\mathcal{P}$ est dit **standard**.





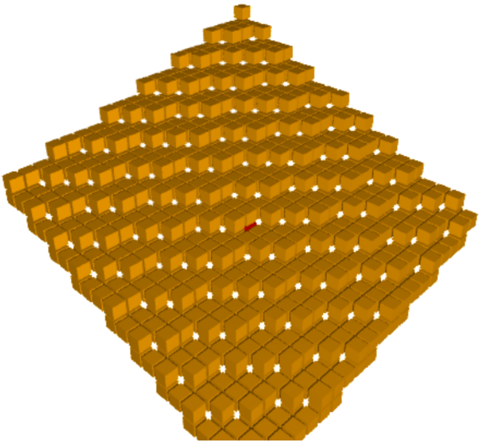
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



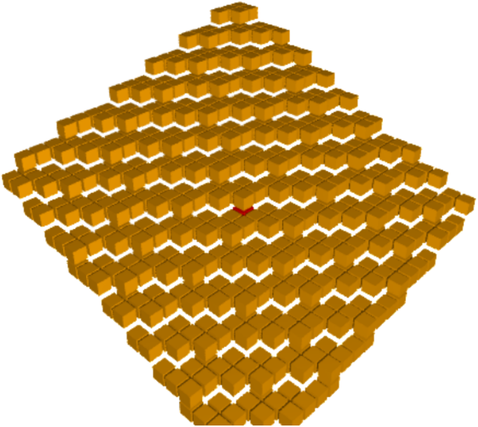
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



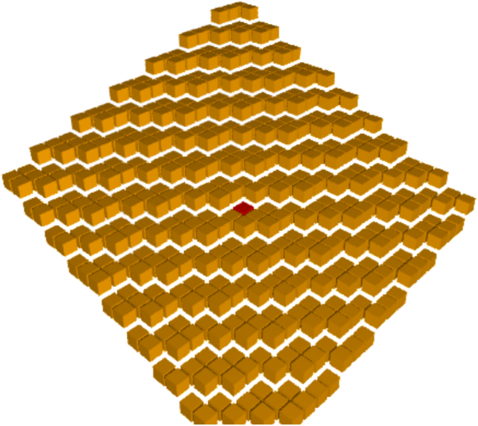
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



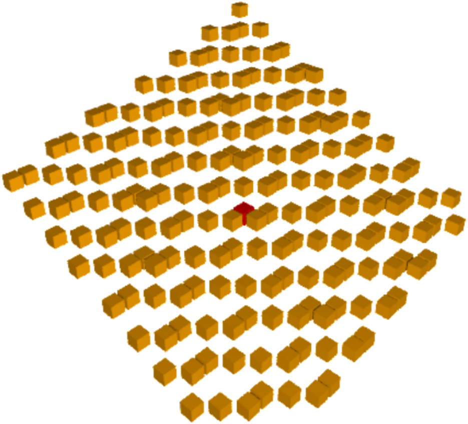
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mu, \theta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



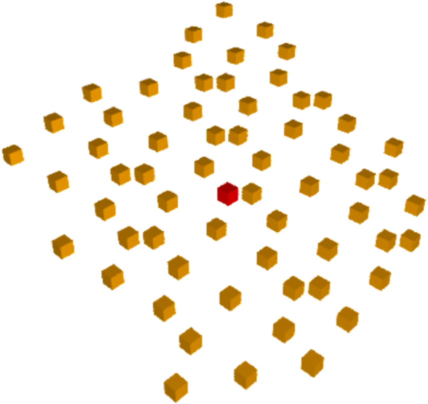
Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



Épaisseur d'un plan discret

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mu, \theta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle + \mu < \theta\}$$



Épaisseur de connexité

Question

Étant donné v et μ, comment déterminer :

$$\inf\{\theta \mid \mathcal{P}(v, \mu, \theta) \textit{ est connecté } \}?$$

- Travaux reliés dans le cadre de la théorie de la percolation :
  [Meester 89], [Kraaikamp, Meester 95]
- Test de connexité :
  [Gérard 02]
- Calcul de l'épaisseur de connexité :
  [Jamet, Toutant 09], [Domenjoud, Jamet, Toutant 09]
- Étude du cas de Tribonacci en lien avec la β-numération :
  [Berthé, Domenjoud, Jamet, P. 13]
- Structure combinatoire :
  [Domenjoud,Vuillon 12], [Berthé, Jamet, Jolivet, P. 13], [Domenjoud, P., Vuillon 14].

L'algorithme Fully Subtractive

L'algorithme **fully subtractive** :

$$\mathbf{FS}\left((a_1, a_2, \cdots, a_d)\right) = (a_1 - a_i, \cdots, a_{i-1} - a_i, a_i, a_{i+1} - a_i, \cdots, a_d - a_i)$$

où $a_i = \min(a_1, a_2, \cdots, a_d)$.

Soit $\mathcal{K} = \left\{ v \in \mathbb{R}_+^d \mid \lim_{n \to \infty} \mathbf{FS}^n(v) = \mathbf{0} \right\}$.

Theorème ([Domenjoud, Jamet, Toutant 09])

Pour tout $d = 3$, l'épaisseur de connexité pour un vecteur normal $v \in \mathcal{K}$ est : $\dfrac{\|v\|_1}{2}$.

Construction guidée par Fully Subtractive

Definition ([Domenjoud,Vuillon 12],[Berthé, Jamet, Jolivet, P. 2013])

Étant donné un vecteur normal v, pour tout $n \geq 0$, on pose :

- $v_n = \mathbf{FS}^n(v)$
- M_n la matrice telle que $v_{n+1} = M_n v_n$.
- δ_n l'indice de la plus petit coordonnée de v_n.
- $T_n = M_0^T M_1^T \cdots M_{n-1}^T e_{\delta_n}$.

Definition

- Soit $P_0 = (0, 0, 0)$,
- Pour tout $n \geq 1$ let $P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

Theorème ([Domenjoud, P., Vuillon 14])

Si $v \in \mathcal{K}$, alors $P_\infty = \mathcal{P}(v, 0, \frac{\|v\|_1}{2})$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

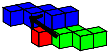
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$



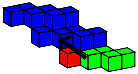
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

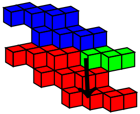


Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$



$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$

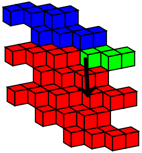
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$



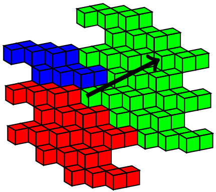
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$



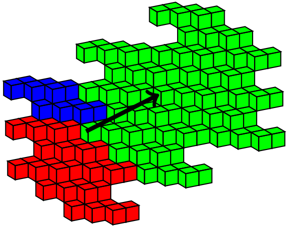
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$



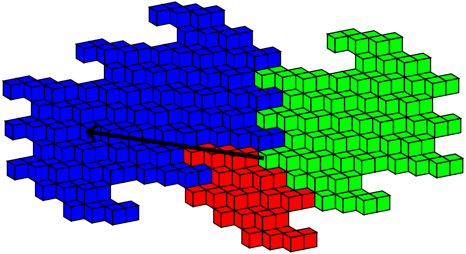
Construction guidée par Fully Subtractive

Exemples :

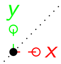
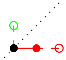
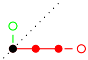
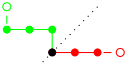
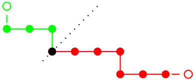
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

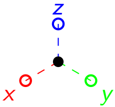
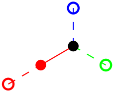
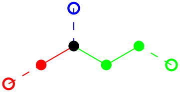
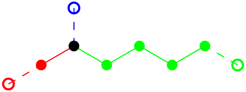
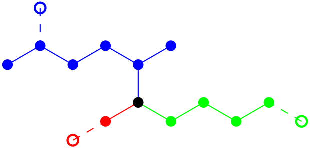
$T_0 = (1, 0, 0)$
$T_1 = (-1, 1, 0)$
$T_2 = (-1, 1, 0)$
$T_3 = (1, -2, 1)$
$T_4 = (1, -2, 1)$
$T_5 = (1, 2, -2)$
$T_6 = (1, 2, -2)$
$T_7 = (-5, 1, 2)$
$T_8 = (-5, 1, 2)$
$T_9 = (9, -8, 1)$

$P_n = P_{n-1} \cup (T_n + P_{n-1})$



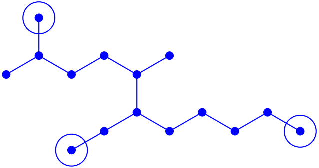
Vision unifiée

Motif	Euclide
	$(\underline{3}, 8)$
	$(\underline{3}, 5)$
	$(3, \underline{2})$
	$(\underline{1}, 2)$
	$(1, 1)$

Motif	**FS**
	$(\underline{6}, 8, 11)$
	$(6, \underline{2}, 5)$
	$(4, \underline{2}, 3)$
	$(2, 2, \underline{1})$
	$(1, 1, 1)$

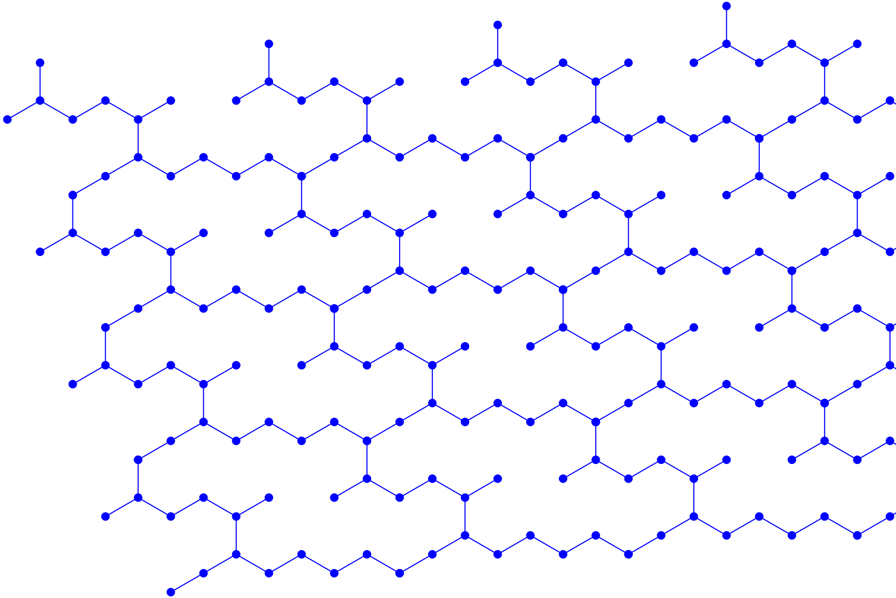
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



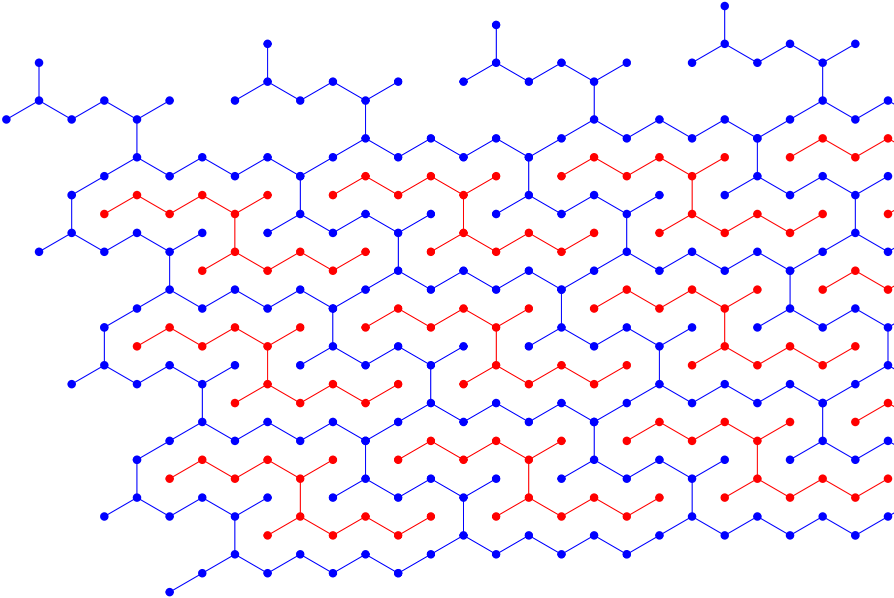
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



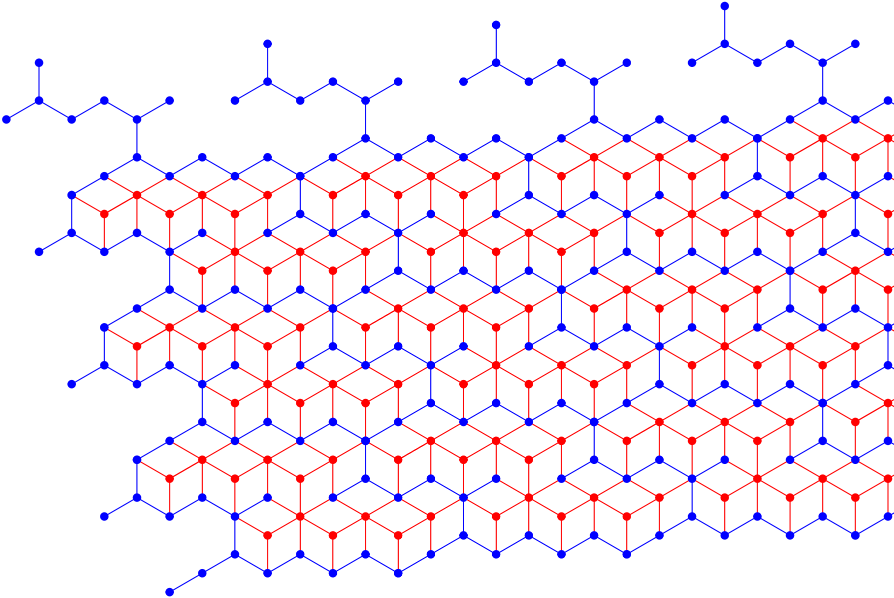
Construction du plan à partir d'un motif

$(6, 8, 11)$



Construction du plan à partir d'un motif

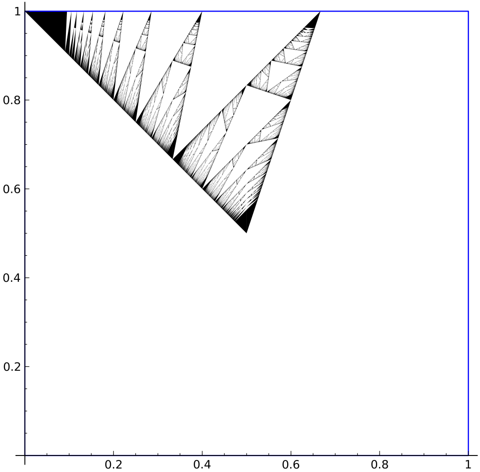
$(6, 8, 11)$



Fin

Theorème ([Kraaikamp, Meester 95])

L'ensemble $\mathcal{K}$ est de mesure nulle.



$\{(x/z, y/z) \mid x \leq y \leq z$ et la construction atteint $(x, y, z)\}$

La construction ne concerne que :

- les vecteurs de $\mathcal{K}$,
- les vecteurs entiers tels que FS atteint $(1, 1, 1)$.