Un algorithme local pour calculer le vecteur normal d'un plan discret

Jacques-Olivier Lachaud,
Xavier Provençal
Tristan Roussillon

LAMA
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie

GT GeoDis, Reims Image 2014, 26 novembre 2014.

DSL arithmétique

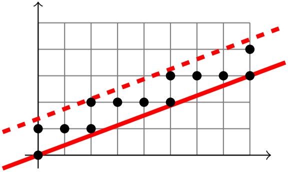
Definition (Reveillès (1991), Kovalev (1990))

La **droite discrète arithmétique** (DSL) standard est :

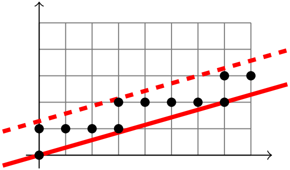
$$\mathcal{D}((a,b),\mu) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \langle (a,b),(x,y) \rangle + \mu < \|(a,b)\|_1\}$$

où

- (a,b) est le **vecteur normal**,
- $-b/a$ est la **pente**,
- μ est le **décalage**.

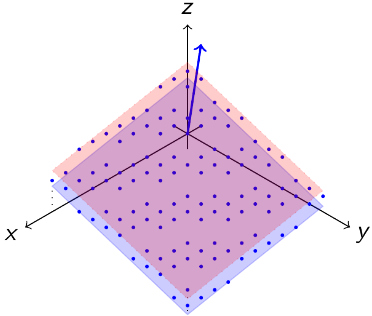


$\mathcal{D}((-3,8),0)$



$\mathcal{D}((-2,7),0)$

Plan discret arithmétique



Definition (Forchhammer 89 and Reveillès 91)

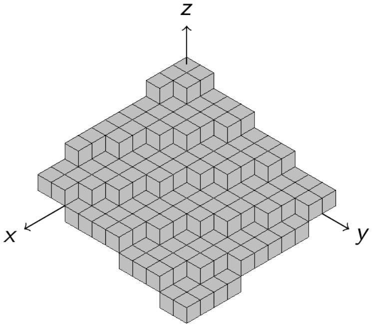
Le plan discret standard est :

$$\mathcal{P}(\mathbf{N},\mu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \mathbf{N}, \mathbf{x} \rangle + \mu < \|\mathbf{N}\|_1\}$$

où

- $\mathbf{N}$ est le vecteur normal,
- μ est le décalage.

Plan discret arithmétique



Definition (Forchhammer 89 and Reveillès 91)

Le plan discret standard est :

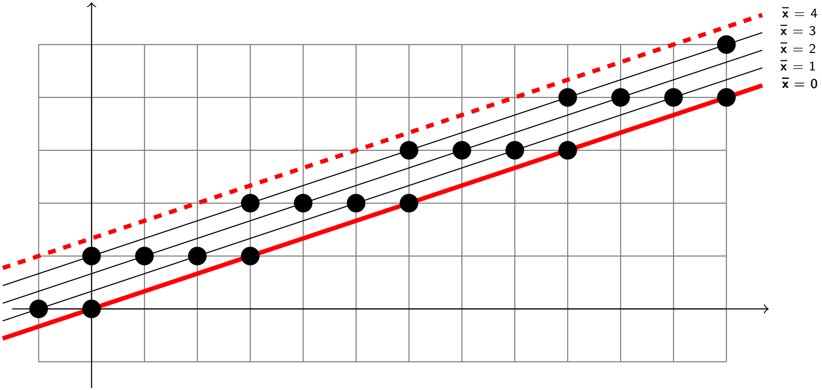
$$\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \langle \mathbf{N}, \mathbf{x} \rangle + \mu < \|\mathbf{N}\|_1\}$$

où

- $\mathbf{N}$ est le vecteur normal,
- μ est le décalage.

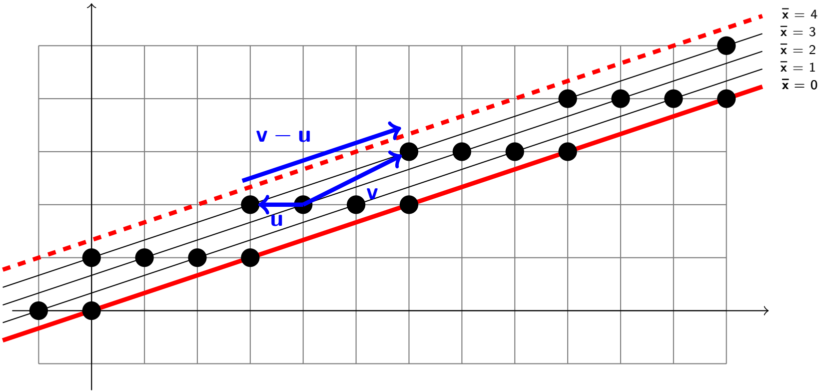
Structure d'une droite discrète

- Notation : $\overline{\mathbf{x}} = \langle x, \mathbf{N} \rangle$ est la hauteur du point $\mathbf{x}$,
- $\mathcal{D}((-3,1),0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \overline{\mathbf{x}} < 4\}$,



Structure d'une droite discrète

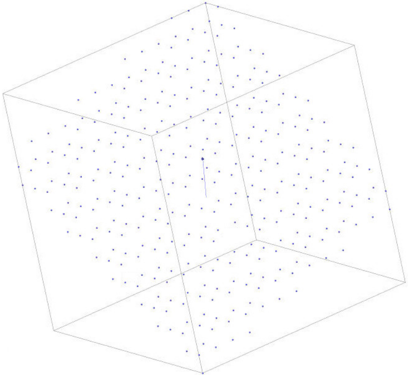
- Notation : $\bar{\mathbf{x}} = \langle x, \mathbf{N} \rangle$ est la hauteur du point $\mathbf{x}$,
- $\mathcal{D}((-3,1),0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < 4\}$,

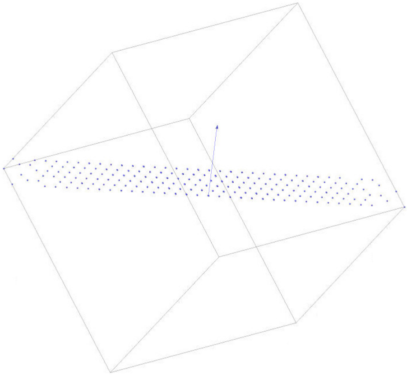


- Vecteurs de Bezout : $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}} = 1$,
- Si $\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}\right) = 1$ alors $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ engendre $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid \bar{\mathbf{x}} = 0\}$.

Structure d'un plan discret

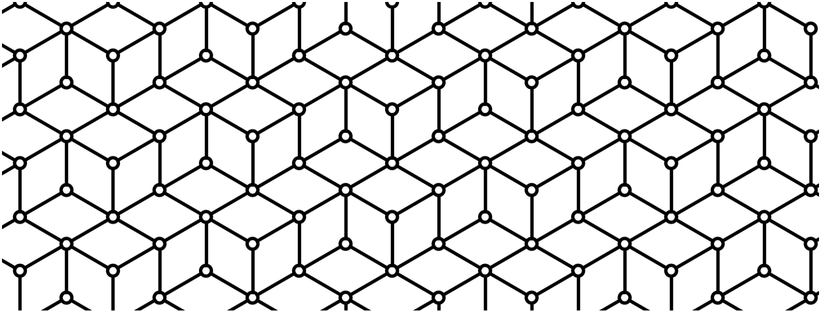
$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$





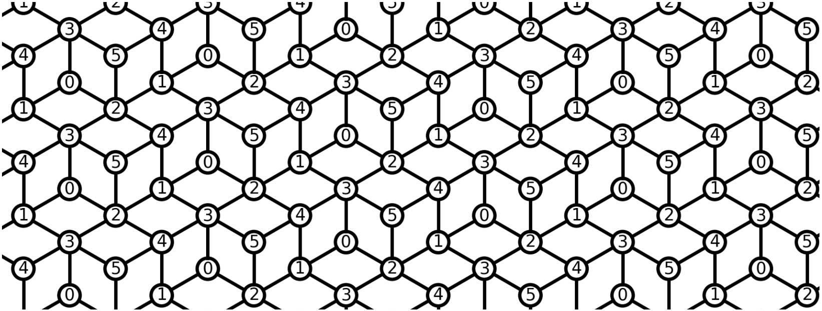
Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



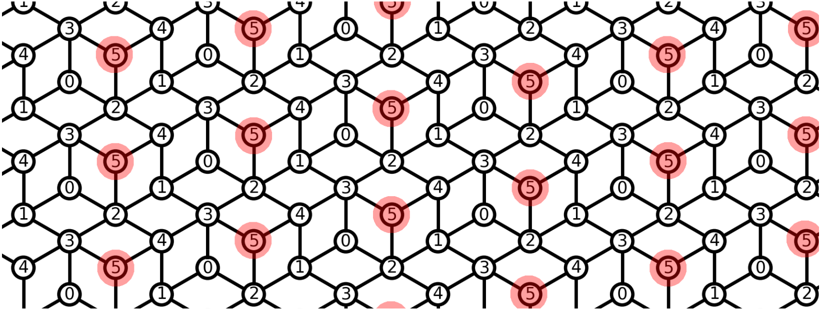
Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \overline{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



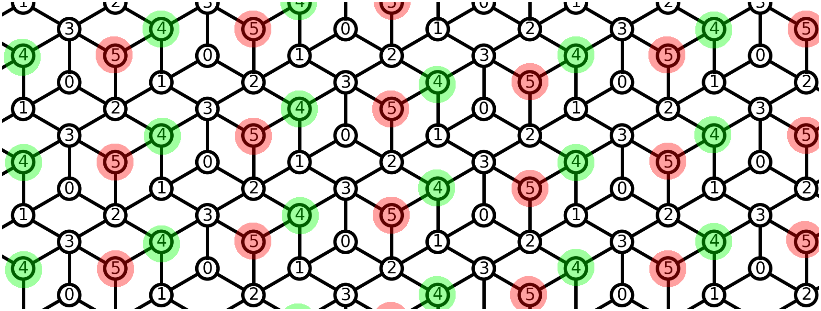
Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



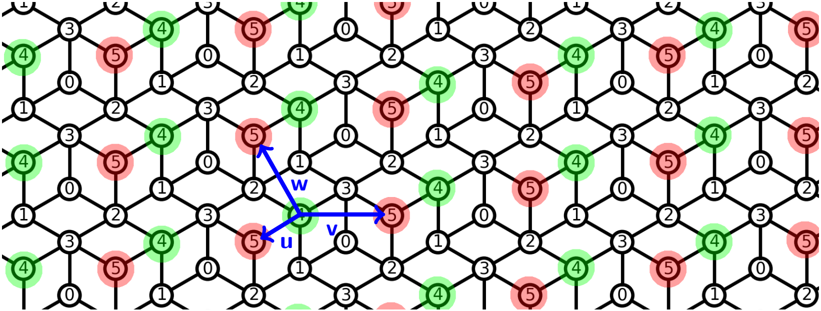
Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \bar{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



Structure d'un plan discret

$$\mathbf{N} = (1,2,3), \quad \mathcal{P}(N,0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq \overline{\mathbf{x}} < \|\mathbf{N}\|_1\}$$



Si $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$ (vecteurs de Bezout) et $\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}\right) = 1$ alors

- $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ et $(\mathbf{w} - \mathbf{u})$ engendrent $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid \overline{\mathbf{x}} = 0\}$,
- $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} - \mathbf{u}) = \pm\mathbf{N}$

Problème principal

Étant donné un prédicat répondant à la question :

"Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?"

Calculer trois vecteurs de Bezout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ linéairement indépendants.

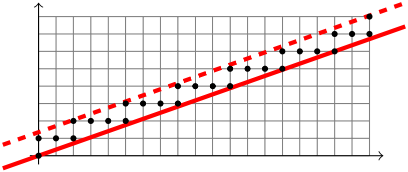
Problème principal

Étant donné un prédicat répondant à la question :

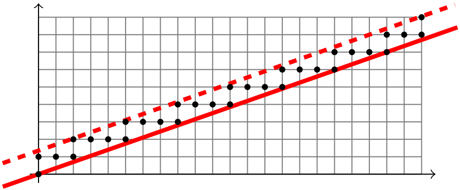
“Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?”

Calculer trois vecteurs de Bezout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ linéairement indépendants.

- On souhaite une approche *aussi locale que possible*.
- Sachant très bien que c’est impossible…



$\mathcal{D}((-6, 17), 0)$



$\mathcal{D}((-7, 20), 0)$

Problème principal

Étant donné un prédicat répondant à la question :

“Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?”

Calculer trois vecteurs de Bezout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ linéairement indépendants.

- On souhaite une approche *aussi locale que possible*.
- Sachant très bien que c’est impossible...

Problème principal

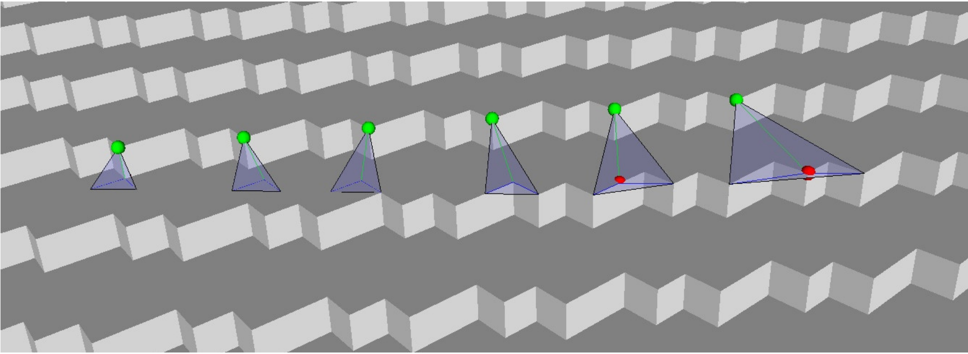
Étant donné un prédicat répondant à la question :

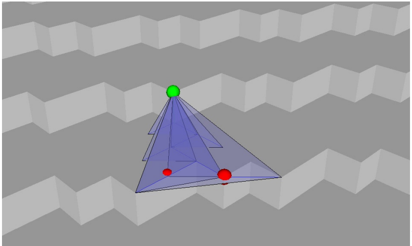
“Est-ce que que le point entier $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$?”

Calculer trois vecteurs de Bezout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ linéairement indépendants.

- On souhaite une approche *aussi locale que possible*.
- Sachant très bien que c'est impossible...
- Hypothèse :
  - $\|\mathbf{N}\|_\infty$ est borné par... disons... `MAXBOUND`.
  - $\mathbf{N} \in \mathbb{N}_+^3$ où $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
  - $\mathrm{pgcd}(\mathbf{N}) = 1$.

L'algorithme en une image





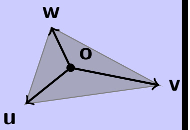
Élément de base de l'algorithme

Entrée :

- Un prédicat P pour le plan discret $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$,
- Un point $\mathbf{x} \in P$.

Definition (Système)

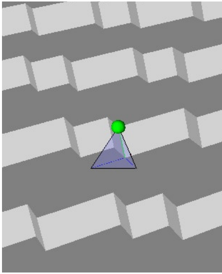
- Un système est un quadruplet $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{Z}^3)^4$.
- Un système est dit valide si :
  - $\mathbf{o}, \mathbf{o}+\mathbf{u}, \mathbf{o}+\mathbf{v}, \mathbf{o}+\mathbf{w} \in P$,
  - $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = 1$,
  - $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} > 0$,



- La normale du système $\mathfrak{S}$ est le vecteur $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) := (\mathbf{v}-\mathbf{u}) \times (\mathbf{w}-\mathbf{u})$

- Initialisation : $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$. Il faut pour cela trouver un “coin” $\mathbf{o}$ où se positionner pour commencer.
- Sortie : $\mathfrak{S}$ est valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$.

Élément de base de l'algorithme

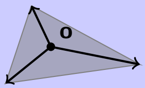


Entrée :

- Un prédicat P pour le plan discret $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$,
- Un point $\mathbf{x} \in P$.

Definition (Système)

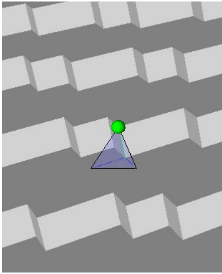
- Un système est un quadruplet $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{Z}^3)^4$.
- Un système est dit valide si :
  - $\mathbf{o}, \mathbf{o}+\mathbf{u}, \mathbf{o}+\mathbf{v}, \mathbf{o}+\mathbf{w} \in P$,
  - $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = 1$,
  - $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} > 0$,



- La normale du système $\mathfrak{S}$ est le vecteur $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) := (\mathbf{v}-\mathbf{u}) \times (\mathbf{w}-\mathbf{u})$

- Initialisation : $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$. Il faut pour cela trouver un "coin" $\mathbf{o}$ où se positionner pour commencer.
- Sortie : $\mathfrak{S}$ est valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$.

Élément de base de l'algorithme

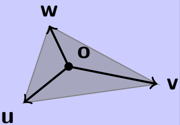


Entrée :

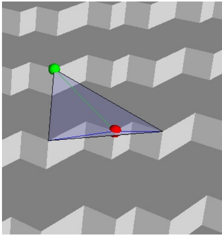
- Un prédicat P pour le plan discret $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$,
- Un point $\mathbf{x} \in P$.

Definition (Système)

- Un système est un quadruplet $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{Z}^3)^4$.
- Un système est dit valide si :
  - $\mathbf{o}, \mathbf{o} + \mathbf{u}, \mathbf{o} + \mathbf{v}, \mathbf{o} + \mathbf{w} \in P$,
  - $\begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = 1$,
  - $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} > 0$,



- La normale du système $\mathfrak{S}$ est le vecteur $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) := (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{w} - \mathbf{u})$



- Initialisation : $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, e_1, e_2, e_3)$. Il faut pour cela trouver un "coin" $\mathbf{o}$ où se positionner pour commencer.
- Sortie : $\mathfrak{S}$ est valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$.

Opérations

Definition

Une opération est une fonction $\lambda : (\mathbb{Z}^3)^4 \to (\mathbb{Z}^3)^4$ telle qu'étant donné $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda((\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, il existe une matrice M_λ satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix} = M_\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Definition

Une opération λ est valide sur un système valide $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ si

- $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda(\mathfrak{S})$ est un système valide,
- $\overline{\mathbf{o}}' > \overline{\mathbf{o}}$,

Opérations

Definition

Une opération est une fonction $\lambda : (\mathbb{Z}^3)^4 \to (\mathbb{Z}^3)^4$ telle qu'étant donné $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda((\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, il existe une matrice M_λ satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix} = M_\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Definition

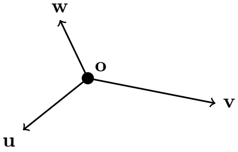
Une opération λ est valide sur un système valide $\mathfrak{S} = (\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ si

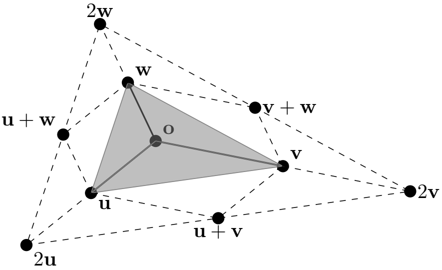
- $(\mathbf{o}', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}') = \lambda(\mathfrak{S})$ est un système valide,
- $\overline{\mathbf{o}}' > \overline{\mathbf{o}}$,

La terminaison de l'algorithme est triviale car $\overline{\mathbf{o}}$ croit à chaque itération et $\mathbf{o} \in P$ imlique $0 \leq \overline{\mathbf{o}} + \mu < \|\mathbf{N}\|_1$.

Opérations locale

Ne considèrent que les 6 points $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 2\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$.



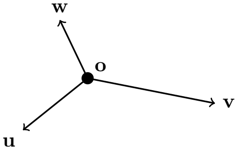


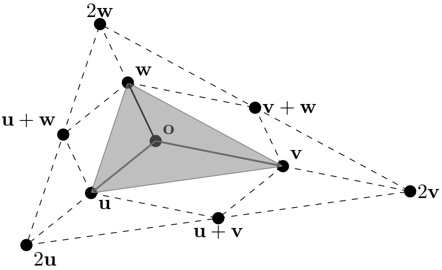
(abus de notation : $2\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{o} + 2\mathbf{u}$)

Toutes les opérations sont exprimées par rapport à une permutation σ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Opérations locale

Ne considèrent que les 6 points $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 2\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$.





(abus de notation : $2\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{o} + 2\mathbf{u}$)

Toutes les opérations sont exprimées par rapport à une permutation σ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

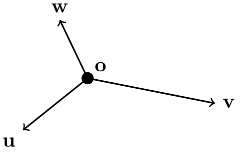
Lemme

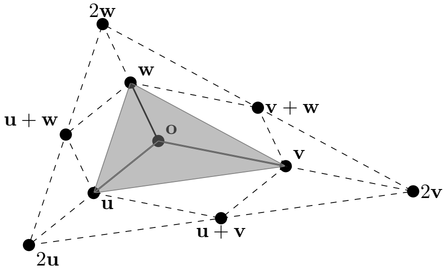
Étant donné $\mathbf{o} \in P$ et deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tel que $\overline{\mathbf{x}} > 0$ et $\overline{\mathbf{y}} > 0$,

$$\mathbf{o} + \mathbf{x} \in P \text{ et } \mathbf{o} + \mathbf{y} \notin P \implies$$

Opérations locale

Ne considèrent que les 6 points $2\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, 2\mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$.





(abus de notation : $2\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{o}+2\mathbf{u}$)

Toutes les opérations sont exprimées par rapport à une permutation σ des vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Lemme

Étant donné $\mathbf{o} \in P$ et deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tel que $\overline{\mathbf{x}} > 0$ et $\overline{\mathbf{y}} > 0$,

$$\mathbf{o}+\mathbf{x} \in P \text{ et } \mathbf{o}+\mathbf{y} \notin P \implies \overline{\mathbf{x}} < \overline{\mathbf{y}}$$

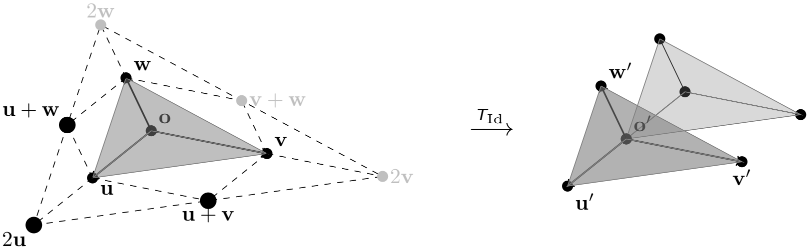
Translation

- Préconditions pour T_{Id} :
  - $\{\mathbf{o}+2\mathbf{u}, \mathbf{o}+\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{o}+\mathbf{u}+\mathbf{w}\} \in P$.

- Opération T_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o}+\mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} \end{aligned}$$

$$M_{T_{\mathrm{Id}}} := Id$$



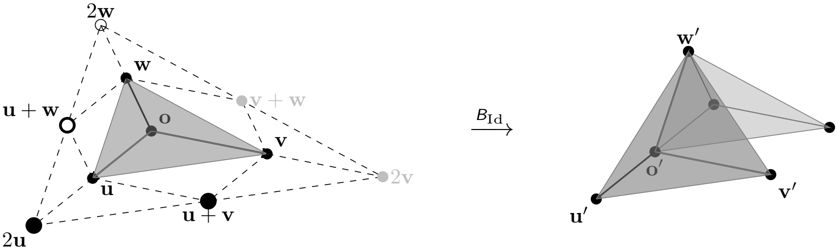
Lemme

T_σ est valide sur un système satisfaisant ses préconditions.

Brun

- Préconditions pour B_{Id} :
  - $\{\mathbf{o} + 2\mathbf{u}, \mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{v}\} \in P$
  - $\{\mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{w}\} \notin P$.
- Opération B_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned} \qquad M_{B_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



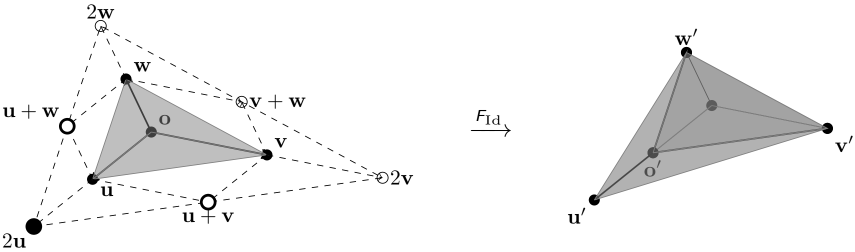
Lemme

B_σ est valide sur un système satisfaisant ses préconditions.

Fully subtractive

- Préconditions pour F_{Id} :
  - $\{\mathbf{o} + 2\mathbf{u}\} \in P$,
  - $\{\mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{o} + \mathbf{u} + \mathbf{w}\} \notin P$.
- Opération F_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned} \qquad M_{F_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

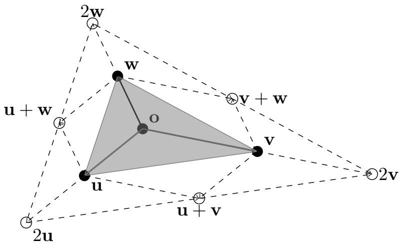


Lemme

F_σ est valide sur un système satisfaisant ses préconditions.

Opérations généralisées

- Les opération généralisées ne sont donc considérées que dans le cas où $\mathbf{o}+2\mathbf{u}$, $\mathbf{o}+2\mathbf{v}$, $\mathbf{o}+2\mathbf{w}$, $\mathbf{o}+\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{o}+\mathbf{u}+\mathbf{w}$, $\mathbf{o}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ sont tous à l'extérieur de P.

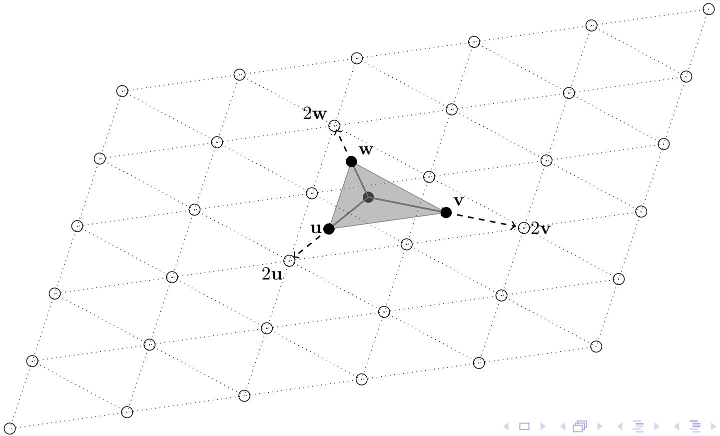


Lattice au-dessus du tétrahèdre

Definition

- $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$
- Système de coordonnées, :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{L}_{\mathbf{u}} : & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w})) \end{array}$$

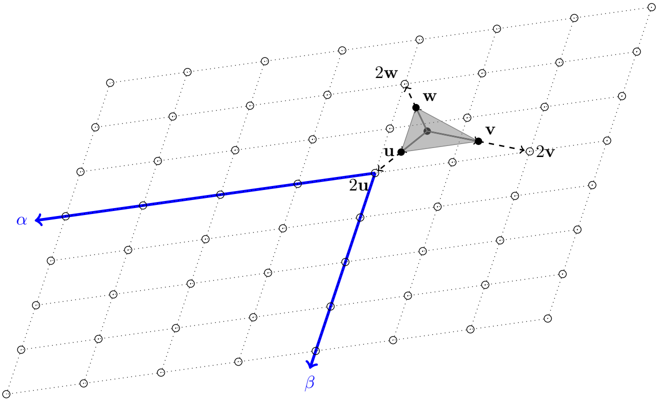


Lattice au-dessus du tétrahèdre

Definition

- $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$
- Système de coordonnées, :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{L}_{\mathbf{u}} : & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w})) \end{array}$$

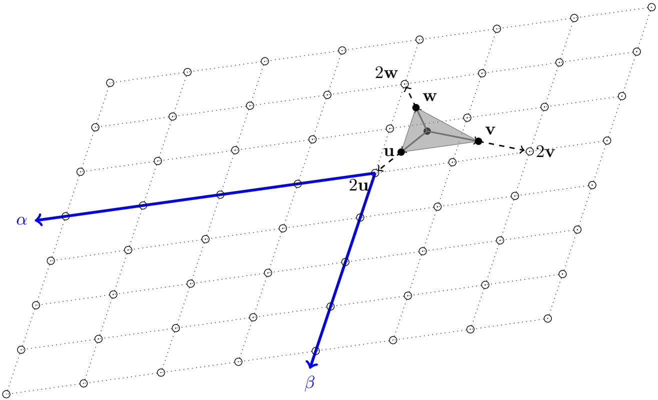


Lattice au-dessus du tétrahèdre

Definition

- $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$
- Système de coordonnées, étant donné une permutation σ :

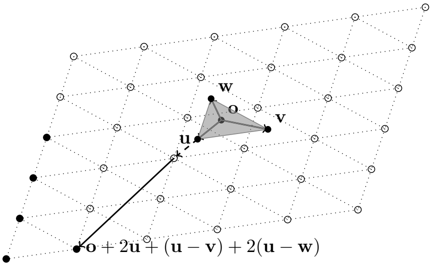
$$\begin{array}{rccl} \mathbb{L}_\sigma : & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathbf{o} + 2\sigma(\mathbf{u}) + \alpha(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{v})) + \beta(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{w})) \end{array}$$



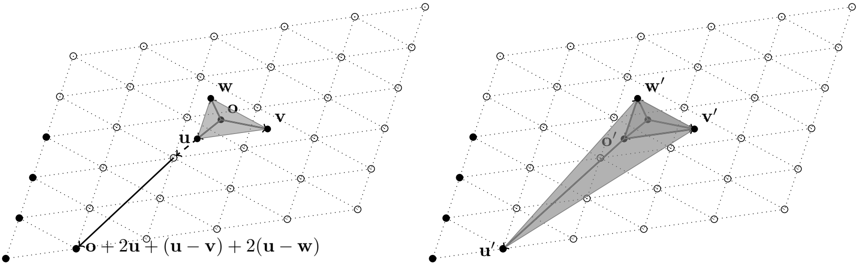
Fully subtractive généralisé

Opération définie pour une paire $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_+$ tels que $\alpha + \beta \geq 1$.

- Préconditions pour $F_{\mathrm{Id}}^{\alpha,\beta}$:
  - Aucune opération locale n'est valide.
  - $\mathbb{L}_{\mathrm{Id}}(\alpha, \beta) \in P$,
  - $\mathbb{L}_{\mathrm{Id}}(\alpha - 1, \beta) \notin P$ et $\mathbb{L}_{\mathrm{Id}}(\alpha, \beta - 1) \notin P$.



Fully subtractive généralisé



- Opération $F^{\alpha,\beta}_{\mathrm{Id}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$M_{F^{\alpha,\beta}_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1+\alpha+\beta & -\alpha & -\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

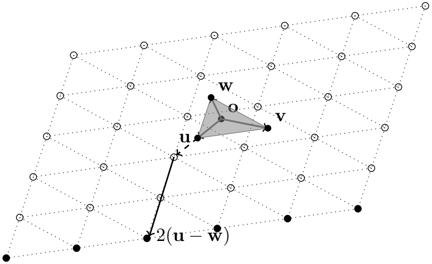
Lemme

$F^{\alpha,\beta}_{\sigma}$ est valide sur un système satisfaisant ses préconditions.

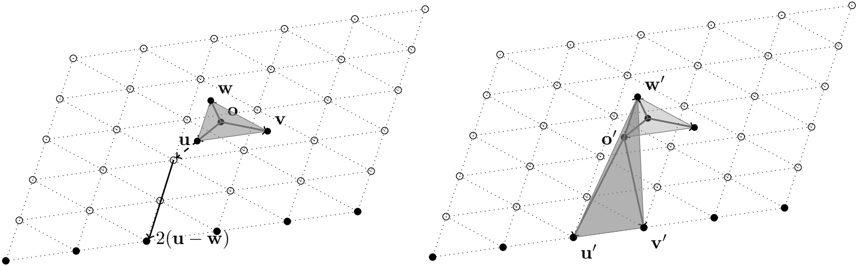
Brun généralisé

Opération définie pour un entier $\beta \geq 1$.

- Préconditions pour B^{β}_{Id} :
  - Aucune opération locale n'est valide.
  - Aucune opération $F^{\alpha,\beta}_{\sigma}$ n'est valide.
  - $\mathbb{L}_{\sigma}(0,\beta), \mathbb{L}_{\sigma}(-1,\beta) \in P$,



Brun généralisé



- Opération B^{β}_{Id} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u}\\
\mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w})\\
\mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w})\\
\mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$M_{B^{\beta}_{\mathrm{Id}}} := \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & -\beta \\ \beta & 1 & -\beta \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Lemme

B^{β}_{σ} est valide sur un système satisfaisant ses préconditions.

L'algorithme

Entrées : Un prédicat P pour $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu)$ et un point $\mathbf{o}$ tel que $P(\mathbf{o})$, $P(\mathbf{o}+e_1)$, $P(\mathbf{o}+e_2)$, $P(\mathbf{o}+e_3)$;

$\mathfrak{S} \leftarrow (e_1, e_2, e_3, \mathbf{o})$;

arreter $\leftarrow$`Faux` ;

tant que ***non*** *arreter* **faire**

  si *il exites une opération valide* λ **alors**

    $\mathfrak{S} \leftarrow \lambda(\mathfrak{S})$;

  sinon

    arreter $\leftarrow$ `Vrai`;

retourner $\mathfrak{S}$;

- L'algorithme termine car $\overline{\mathbf{o}}$ est un entier borné qui augmente à chaque itération.
- Quand il termine, on a $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$.

Validité de l'algorithme

Theorem
Soit $\mathfrak{S}$ un système valide tel que $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$, alors $\overline{\mathbf{u}} = 1$ et $\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}) = \mathbf{N}$.

Preuve : soit $M = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{1} = e_1 + e_2 + e_3$.

- On pose $k = \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$,

$$M\mathbf{N} = k\mathbf{1} \implies \mathbf{N} = kM^{-1}\mathbf{1}.$$

  On a bien, $k = 1$.

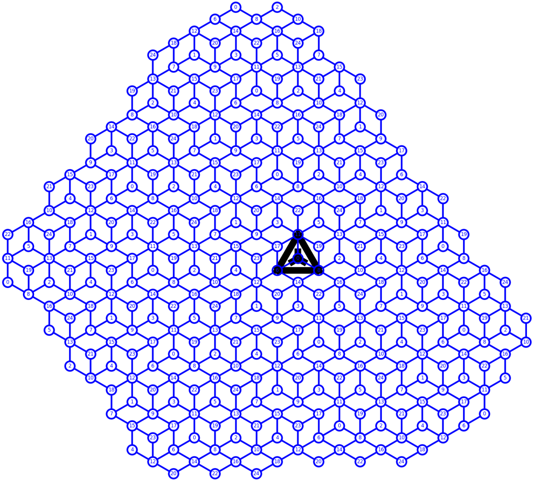
- À chaque étape de l'algorithme on a :

$$\langle \hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}), \mathbf{u} \rangle = \langle \hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}), \mathbf{v} \rangle = \langle \hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S}), \mathbf{w} \rangle = 1$$

  Et donc, $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = 1$ implique $M\mathbf{N} = M\hat{\mathbf{N}}(\mathfrak{S})$.

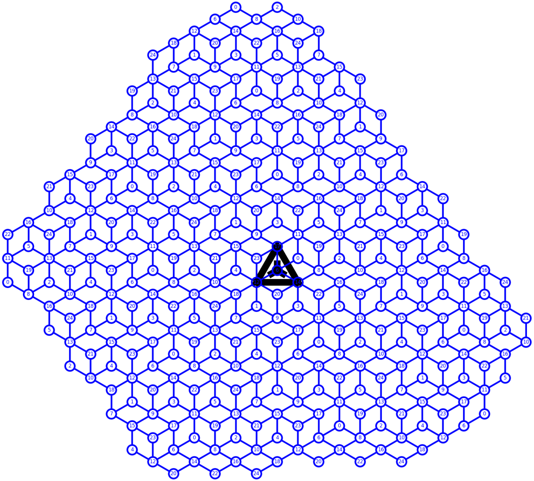
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



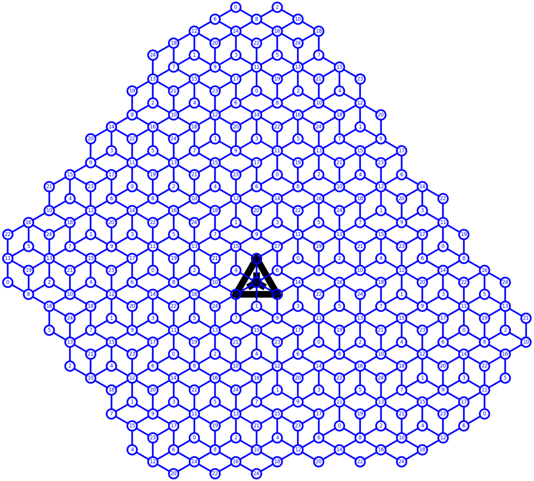
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



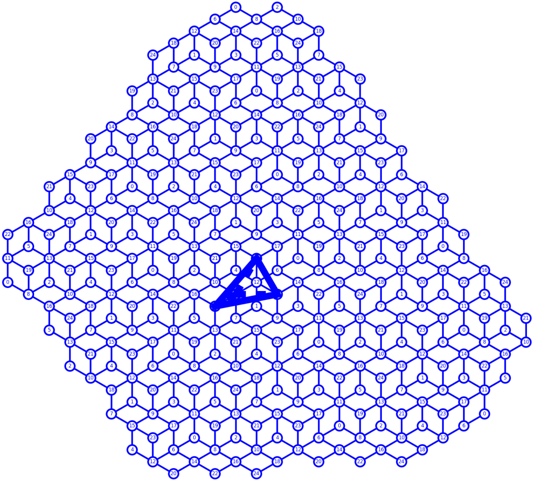
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



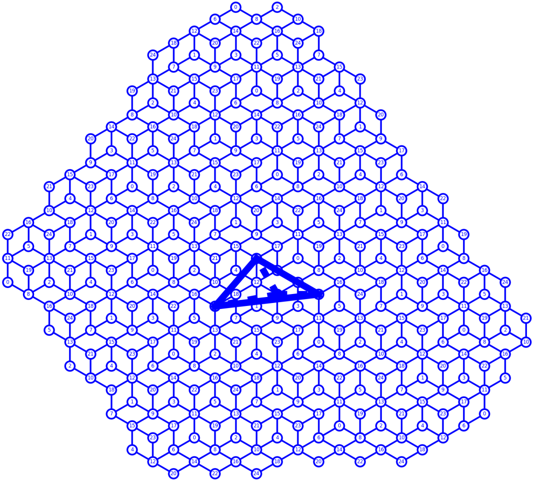
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



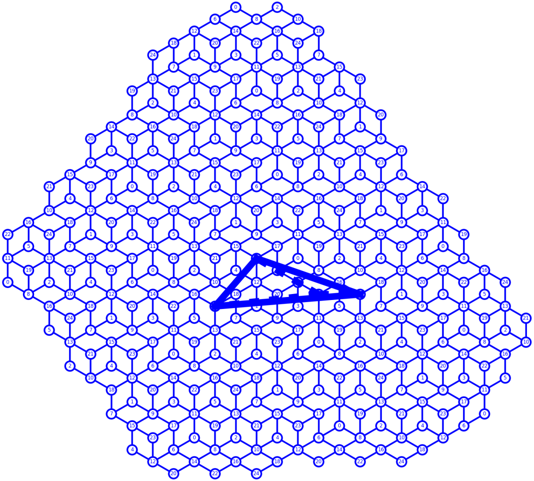
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



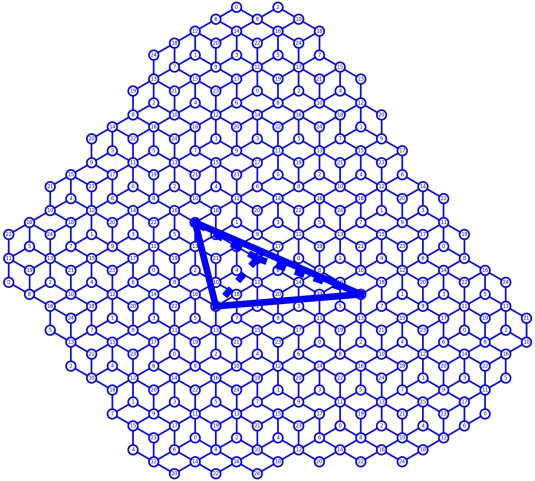
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



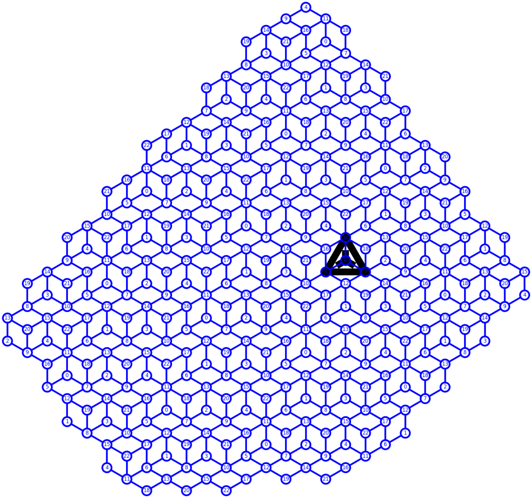
Exemples

- $\mathbf{N} = (6, 8, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - F_{uvw},
  - F_{vuw},
  - F_{vuw},
  - F_{wuv},



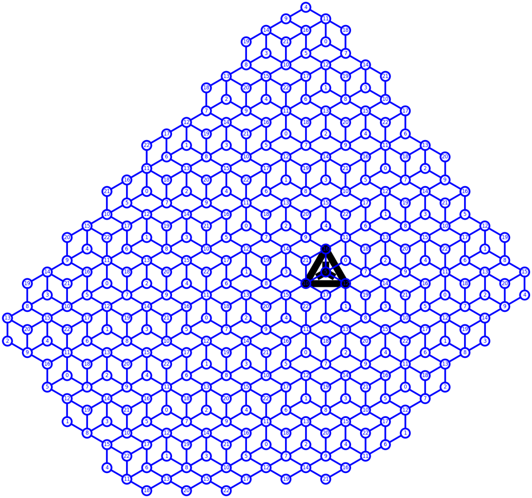
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



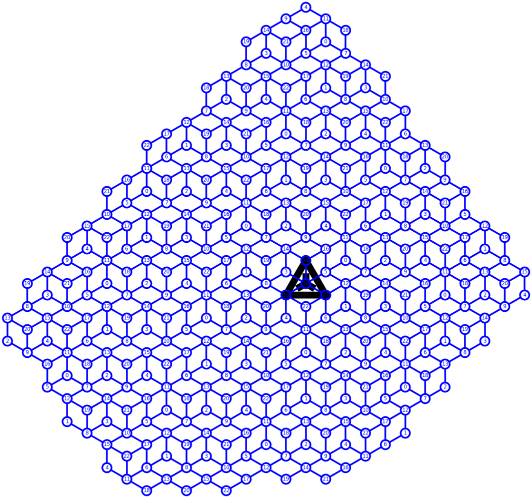
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



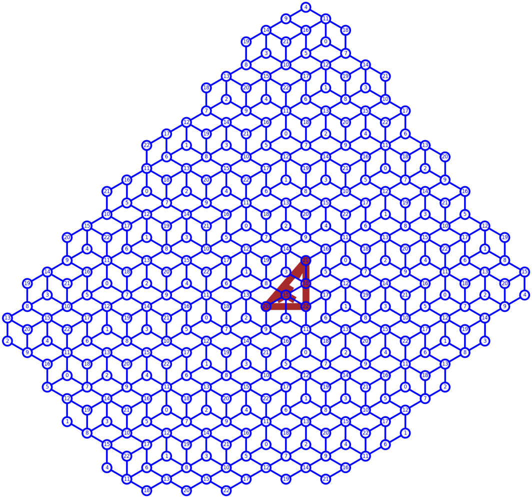
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



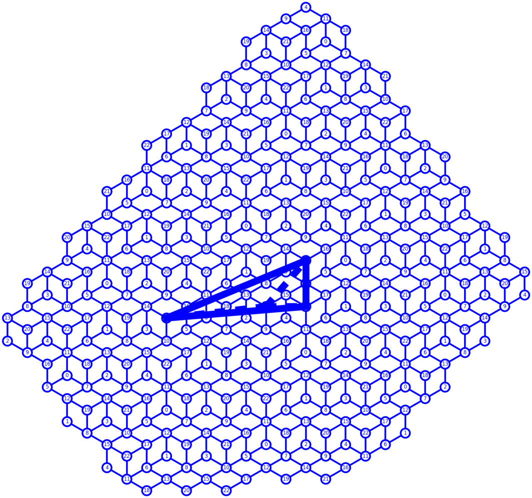
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



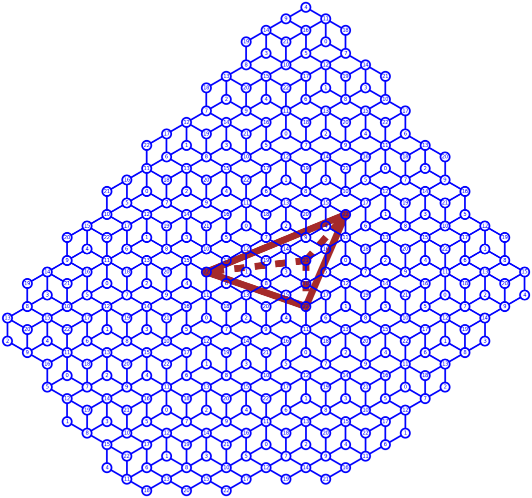
Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},

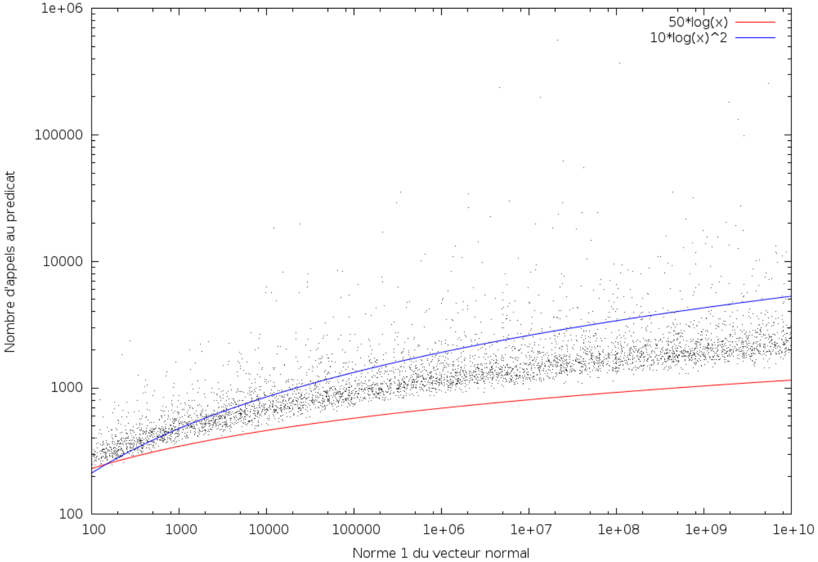


Exemples

- $\mathbf{N} = (5, 7, 11)$,
- Opérations :
  - T_{uvw},
  - T_{uvw},
  - B_{uvw},
  - $F^{2,0}_{uvw}$,
  - B_{wuv},



Nombre de points testés



Questions ? Commentaires ?