

Mots pleins, arbres et plans critiques

X. Provençal,

collaboration avec É. Domenjoud et L. Vuillon

LaCIM, UQAM, Montréal



23 août 2013

1 Mots, langage palindromique et pleinitude

2 Plans discets et épaisseur critique

3 Résultat principal

Définition (Brlek, Hamel, Nivat, Reutenauer, 2004)

Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit *plein* si $|\text{Pal}(w)| = |w| + 1$.

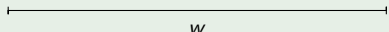
Théorème (Droubay, Justin, Pirillo, 2001)

Les mots pleins atteignent la borne maximale du nombre de palindrome dans un mot.

Sketch de la proof

Par récurrence sur la longueur du mot.

$|\text{Pal}(w)|$



Définition (Brlek, Hamel, Nivat, Reutenauer, 2004)

Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit *plein* si $|\text{Pal}(w)| = |w| + 1$.

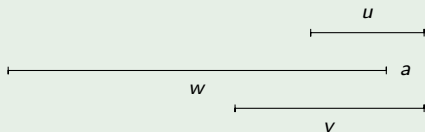
Théorème (Droubay, Justin, Pirillo, 2001)

Les mots pleins atteignent la borne maximale du nombre de palindrome dans un mot.

Sketch de la proof

Par récurrence sur la longueur du mot.

$$|\text{Pal}(wa)| \geq |\text{Pal}(w)| + 2$$



Définition (Brek, Hamel, Nivat, Reutenauer, 2004)

Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit *plein* si $|\text{Pal}(w)| = |w| + 1$.

Théorème (Droubay, Justin, Pirillo, 2001)

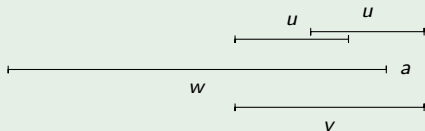
Les mots pleins atteignent la borne maximale du nombre de palindrome dans un mot.

Sketch de la proof

Par récurrence sur la longueur du mot.

$$\text{--- } |\text{Pal}(wa)| \geq |\text{Pal}(w)| + 2 \text{ ---}$$

$$|\text{Pal}(wa)| \leq |\text{Pal}(w)| + 1$$



Définition (Brlek, Hamel, Nivat, Reutenauer, 2004)

Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit *plein* si $|\text{Pal}(w)| = |w| + 1$.

Théorème (Droubay, Justin, Pirillo, 2001)

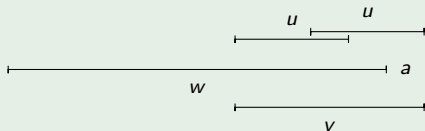
Les mots pleins atteignent la borne maximale du nombre de palindrome dans un mot.

Sketch de la proof

Par récurrence sur la longueur du mot.

$$\text{--- } |\text{Pal}(wa)| \geq |\text{Pal}(w)| + 2 \text{ ---}$$

$$|\text{Pal}(wa)| \leq |\text{Pal}(w)| + 1$$



Cette preuve fournit une bijection explicite entre les lettres du mot et l'ensemble de ses palindromes.

Exemple

a b a a a b a

Mots pleins

Définition (Brek, Hamel, Nivat, Reutenauer, 2004)

Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit *plein* si $|\text{Pal}(w)| = |w| + 1$.

Théorème (Droubay, Justin, Pirillo, 2001)

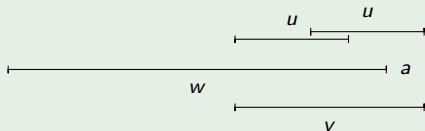
Les mots pleins atteignent la borne maximale du nombre de palindrome dans un mot.

Sketch de la proof

Par récurrence sur la longueur du mot.

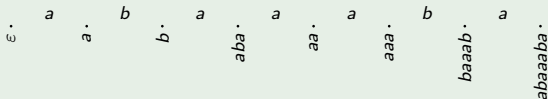
$$\cancel{|\text{Pal}(wa)| \geq |\text{Pal}(w)| + 2}$$

$$|\text{Pal}(wa)| \leq |\text{Pal}(w)| + 1$$



Cette preuve fournit une bijection explicite entre les lettres du mot et l'ensemble de ses palindromes.

Exemple



Définition

Un *arbre* est un graphe $G = (S, A)$ connexe sans cycle.

Propriété

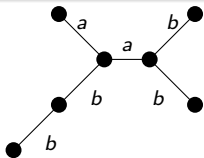
Si G est un arbre, toute paire u, v sommets de G est relié par un unique chemin.

Si les arêtes de G sont étiquetées, on note $\pi(u, v)$ la concaténation des étiquettes des arêtes le long du chemin de u à v .

Définition

Le *langage* d'un arbre $G = (S, A)$ est l'ensemble

$$\mathcal{L}(G) = \{\pi(u, v) \mid u, v \in S\}.$$



Définition

Un *arbre* est un graphe $G = (S, A)$ connexe sans cycle.

Propriété

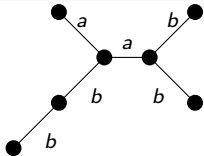
Si G est un arbre, toute paire u, v sommets de G est relié par un unique chemin.

Si les arêtes de G sont étiquetées, on note $\pi(u, v)$ la concaténation des étiquettes des arêtes le long du chemin de u à v .

Définition

Le langage d'un arbre $G = (S, A)$ est l'ensemble

$$\mathcal{L}(G) = \{\pi(u, v) \mid u, v \in S\}.$$



$$\mathcal{L}(G) = \{\varepsilon, a, aa, aab, ab, abb, b, ba, baa, bab, babb, bb, bba, bbab\},$$

$$\text{Pal}(G) = \{\varepsilon, a, aa, b, bab, bb\}.$$

Définition

Un *arbre* est un graphe $G = (S, A)$ connexe sans cycle.

Propriété

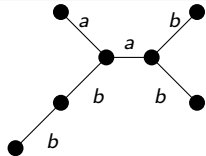
Si G est un arbre, toute paire u, v sommets de G est relié par un unique chemin.

Si les arêtes de G sont étiquetées, on note $\pi(u, v)$ la concaténation des étiquettes des arêtes le long du chemin de u à v .

Définition

Le *langage* d'un arbre $G = (S, A)$ est l'ensemble

$$\mathcal{L}(G) = \{\pi(u, v) \mid u, v \in S\}.$$



$$\mathcal{L}(G) = \{\varepsilon, a, aa, aab, ab, abb, b, ba, baa, bab, babb, bb, bba, bbab\},$$

$$\text{Pal}(G) = \{\varepsilon, a, aa, b, bab, bb\}.$$

Question

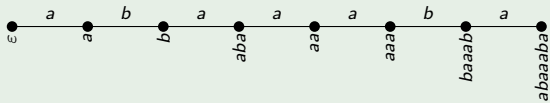
Au maximum, combien de palindromes peut contenir un arbre à n sommets ?

Exemple

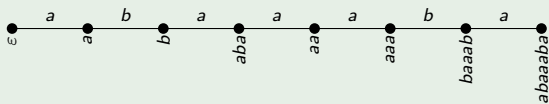
ϵ . a b a a a a b a

a . b . a . aba . aa . aaa . $baaab$. $abaaaba$.

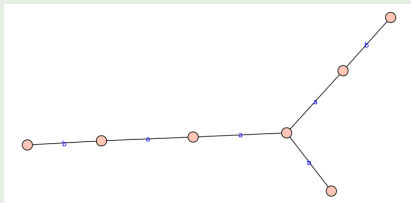
Exemple



Exemple



Exemple



$$\text{Pal}(G) = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, baab, baab, bab\}$$

1 Mots, langage palindromique et pleinitude

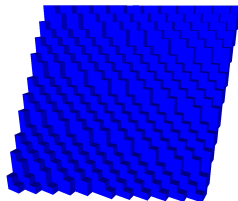
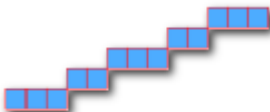
2 Plans discets et épaisseur critique

3 Résultat principal

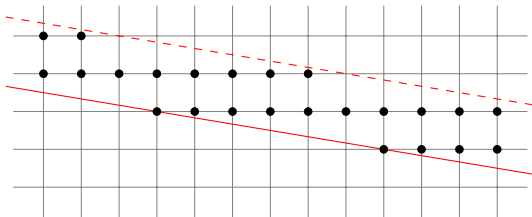
Définition (J.-P. Reveillès, 1991)

L'hyperplan discret $P(v, \mu, \omega)$ de vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$, de décalage $\mu \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de \mathbb{Z}^d défini par :

$$P(v, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$



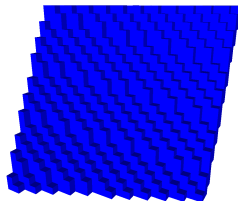
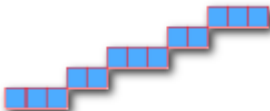
$P((1, 6), 3, 11)$
 $0 \leq 1x + 6y - 3 < 11$



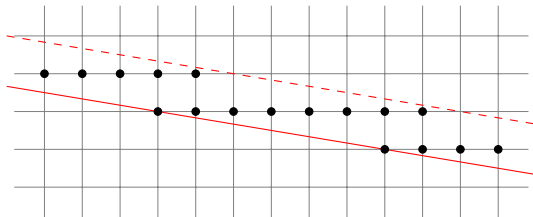
Définition (J.-P. Reveillès, 1991)

L'hyperplan discret $P(v, \mu, \omega)$ de vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$, de décalage $\mu \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de \mathbb{Z}^d défini par :

$$P(v, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$



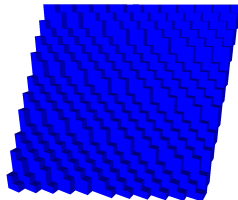
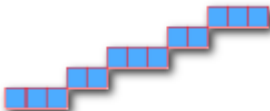
$$P((1, 6), 3, 11)$$
$$0 \leq 1x + 6y - 3 < 8$$



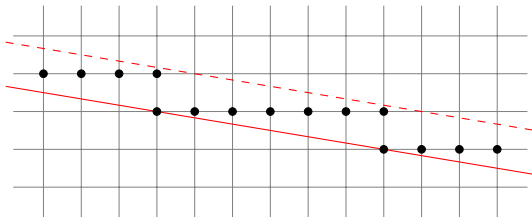
Définition (J.-P. Reveillès, 1991)

L'hyperplan discret $P(v, \mu, \omega)$ de vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$, de décalage $\mu \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de \mathbb{Z}^d défini par :

$$P(v, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$



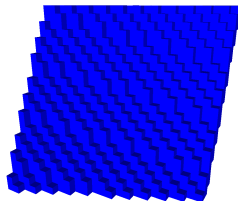
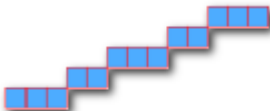
$$P((1, 6), 3, 11)$$
$$0 \leq 1x + 6y - 3 < 7$$



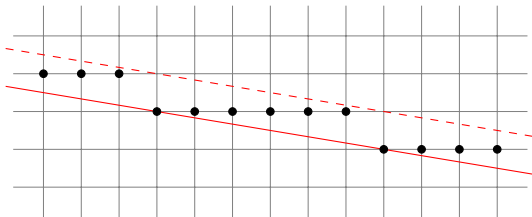
Définition (J.-P. Reveillès, 1991)

L'hyperplan discret $P(v, \mu, \omega)$ de vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$, de décalage $\mu \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de \mathbb{Z}^d défini par :

$$P(v, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$



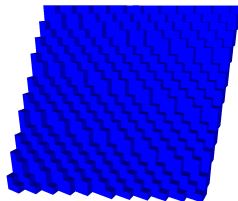
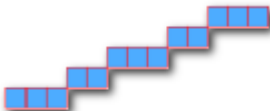
$$P((1, 6), 3, 11)$$
$$0 \leq 1x + 6y - 3 < 6$$



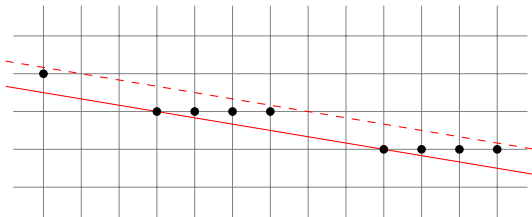
Définition (J.-P. Reveillès, 1991)

L'hyperplan discret $P(v, \mu, \omega)$ de vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$, de décalage $\mu \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de \mathbb{Z}^d défini par :

$$P(v, \mu, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$



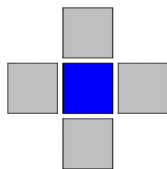
$$P((1, 6), 3, 11)$$
$$0 \leq 1x + 6y - 3 < 4$$



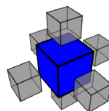
Définition

Deux points x, y de \mathbb{Z}^d sont *connexes* si et seulement si il exist $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ tel que

$$x \pm e_i = y.$$



$d = 2$



$d = 3$

Question

Étant donné u vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$ et un décalage $\mu \in \mathbb{R}$, pour quelles valeurs de l'épaisseur ω l'hyperplan $P(v, \mu, \omega)$ est-il connexe ?



Ronald W. J. Meester.

An algorithm for calculating critical probabilities and percolation functions in percolation models defined by rotations.

Ergodic Theory and Dynamical Systems, 9(03):495–509, 1989.



C. Kraaikamp & Ronald W. J. Meester.

Ergodic properties of a dynamical system arising from percolation theory.

Ergodic Theory and Dynamical Systems, 15(04):653–661, 1995.



Y. Gérard.

Periodic graphs and connectivity of the rational digital hyperplanes.

Theoretical Computer Science, 283(1):171–182, 2002.



V. E. Brimkov & R. P. Barneva.

Connectivity of discrete planes.

Theoretical Computer Science, 319(1-3):203–227, 2004.



D. Jamet & J.-L. Toutant.

Minimal arithmetic thickness connecting discrete planes.

Discrete Applied Mathematics, 157(3):500–509, 2009.



E. Domenjoud, D. Jamet & J.-L. Toutant.

On the connecting thickness of arithmetical discrete planes.

Actes DGCI 2009, LNCS 5810:362–372, 2009.



E. Domenjoud & L. Vuillon.

Geometric Palindromic Closures.

Uniform Distribution Theory, 7(2):109–140, 2012.



V. Berthé, É. Domenjoud, D., Jamet & X. Provençal

Fully subtractive algorithm, tribonacci numeration and connectedness of discrete planes.

RIMS Lecture notes 'Kokyuroku Bessatu', (à paraître) 2013.



V. Berthé, D., Jamet, T. Jolivet & X. Provençal

Critical connectedness of thin arithmetical discrete planes.

Actes DGCI 2013, LNCS 7749:107–118, 2013.

On pose $\mathcal{O}_+^3 = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3\}$.
s.p.d.g. on supposera toujours que $v \in \mathcal{O}_+^3$.

Propriété

Étant donné u vecteur normal $v \in \mathcal{O}^3$ et un décalage $\mu \in \mathbb{R}$, les valeurs de l'épaisseur ω telles que $P(v, \mu, \omega)$ est connexe forment un intervalle.

Définition

On appelle *épaisseur critique* la valeur $\Omega(v, \mu) = \inf\{\omega \mid P(v, \mu, \omega) \text{ est connexe}\}$.

Théorème (Jamet, Toutant 2009 et Domenjoud, Jamet, Toutant 2012)

L'épaisseur critique $\Omega(v, \mu)$ est calculée par "l'algorithmme" suivant :

```
Fonction épaisseur.critique(  $v \in \mathcal{O}_+^3$  ) :  
  Si  $v_1 + v_2 \leq v_3$  alors  
    Retourne  $v_3$   
  Sinon  
    Retourne  $v_1 + \text{épaisseur.critique}( \text{trier}( v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1 ) )$   
  Fin si  
Fin
```

Corollaire

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\Omega(v, \mu) = \Omega(v, 0)$.

Épaisseur de connexité

Fonction épaisseur_critique($v \in \mathcal{O}_+^3$) :

```
Si  $v_1 + v_2 \leq v_3$  alors
  Retourne  $v_3$ 
Sinon
  Retourne  $v_1 + \text{épaisseur\_critique}( \text{trier}( v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1 ) )$ 
Fin si
Fin
```

Étant donné un vecteur $v \in \mathcal{O}_+^3$, on pose :

- $v^{(0)} = v$,
- $v^{(n+1)} = \text{trier}(v_1^{(n)}, v_2^{(n)} - v_1^{(n)}, v_3^{(n)} - v_1^{(n)})$ pour $n \geq 0$.

On définit $\mathcal{F}_3 = \{v \in \mathcal{O}_+^3 \mid v_1^{(n)} + v_2^{(n)} > v_3^{(n)} \text{ pour tout } n\}$.

Théorème (Domenjoud, Vuillon 2012 et Berthé, Jamet, Jolivet, P., 2013)

Étant donné $v \in \mathcal{O}_+^3$,

- Si $v \notin \mathcal{F}_3$ alors
 - $P(v, \mu, \Omega(v))$ n'est pas connexe.
- Si $v \in \mathcal{F}_3$ alors
 - $\Omega(v) = \frac{\|v\|_1}{2}$
 - $P(v, 0, \Omega(v))$ est connexe.
 - Il existe des valeurs de μ tel que $P(v, \mu, \Omega(v))$ n'est pas connexe.

Épaisseur de connexité

Fonction épaisseur_critique($v \in \mathcal{O}_+^3$) :

```
Si  $v_1 + v_2 \leq v_3$  alors
  Retourne  $v_3$ 
Sinon
  Retourne  $v_1 + \text{épaisseur\_critique}( \text{trier}( v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1 ) )$ 
Fin si
Fin
```

Étant donné un vecteur $v \in \mathcal{O}_+^3$, on pose :

- $v^{(0)} = v$,
- $v^{(n+1)} = \text{trier}(v_1^{(n)}, v_2^{(n)} - v_1^{(n)}, v_3^{(n)} - v_1^{(n)})$ pour $n \geq 0$.

On définit $\mathcal{F}_3 = \{v \in \mathcal{O}_+^3 \mid v_1^{(n)} + v_2^{(n)} > v_3^{(n)} \text{ pour tout } n\}$.

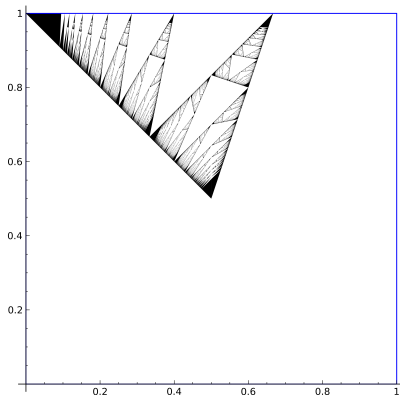
Théorème (Domenjoud, Vuillon 2012 et Berthé, Jamet, Jolivet, P., 2013)

Étant donné $v \in \mathcal{O}_+^3$,

- Si $v \notin \mathcal{F}_3$ alors
 - $P(v, \mu, \Omega(v))$ n'est pas connexe.
- Si $v \in \mathcal{F}_3$ alors
 - $\Omega(v) = \frac{\|v\|_1}{2}$ (cas limite de l'algorithme épaisseur_critique)
 - $P(v, 0, \Omega(v))$ est connexe.
 - Il existe des valeurs de μ tel que $P(v, \mu, \Omega(v))$ n'est pas connexe.

Théorème (Kraaikam & Meester 1995)

L'ensemble \mathcal{F}_d est de mesure nulle.

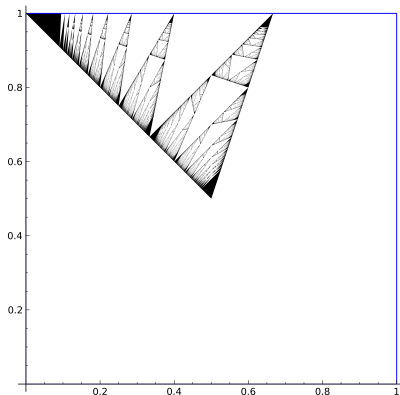


Ensemble des (x, y) tels que $(x, y, 1) \in \mathcal{F}_3 = \{v \in \mathcal{O}_+^3 \mid v_1^{(n)} + v_2^{(n)} > v_3^{(n)} \text{ pour tout } n\}$

L'ensemble \mathcal{F}_3

Théorème (Kraaikam & Meester 1995)

L'ensemble \mathcal{F}_d est de mesure nulle.



Ensemble des (x, y) tels que $(x, y, 1) \in \mathcal{F}_3 = \{v \in \mathcal{O}_+^3 \mid v_1^{(n)} + v_2^{(n)} > v_3^{(n)} \text{ pour tout } n\}$

Théorème (Berthé, Jamet, Jolivet, P.)

Pour tout $v \in \mathcal{F}_3$ on a $\dim_{\mathbb{Q}}(v) = 3$.

Matrices fully subtractive

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étant donné $v \in \mathcal{F}_3$, il existe une suite $(i_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$v^{(n+1)} = M_{i_{n+1}} v^{(n)} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On pose $\mathcal{M}_n = M_{i_n} M_{i_{n-1}} \cdots M_{i_1}$ et on a

$$v_1^{(n)} = \langle e_1, v^{(n)} \rangle = \langle e_1, \mathcal{M}_n v \rangle = \langle {}^T \mathcal{M}_n e_1, v \rangle$$

On pose $t_n = {}^T \mathcal{M}_n e_1$ et on a :

- $\langle t_n, v \rangle > 0$ pour tout $n \geq 1$.
- $\sum_{n \geq 1} \langle t_n, v \rangle = \frac{\|v\|_1}{2} = \Omega(v)$.

Matrices fully subtractive

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étant donné $v \in \mathcal{F}_3$, il existe une suite $(i_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$v^{(n+1)} = M_{i_{n+1}} v^{(n)} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On pose $\mathcal{M}_n = M_{i_n} M_{i_{n-1}} \cdots M_{i_1}$ et on a

$$v_1^{(n)} = \langle e_1, v^{(n)} \rangle = \langle e_1, \mathcal{M}_n v \rangle = \langle {}^T \mathcal{M}_n e_1, v \rangle$$

On pose $t_n = {}^T \mathcal{M}_n e_1$ et on a :

- $\langle t_n, v \rangle > 0$ pour tout $n \geq 1$.
- $\sum_{n \geq 1} \langle t_n, v \rangle = \frac{\|v\|_1}{2} = \Omega(v)$.

$$\bigcup_{\substack{I \subset \mathbb{N} \\ I \text{ fini}}} \left\{ \sum_{i \in I} t_i \right\} \subset P(v, 0, \Omega(v))$$

Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.

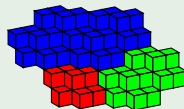


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.

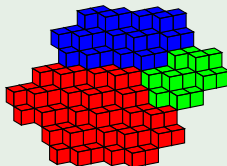


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.

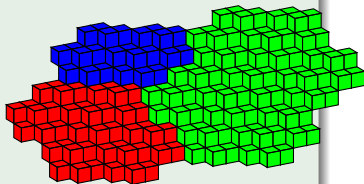


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.

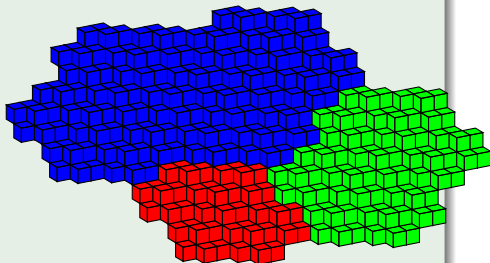


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.

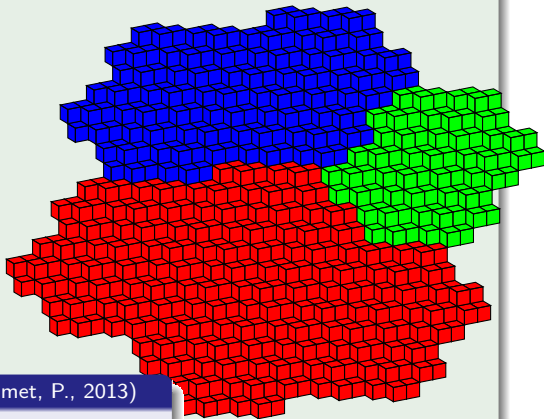


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 1 : Tribonacci

- On choisi v vecteur propre de M_3
- $\mathcal{M}_n = M_3^n$.
- $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α est la racine réelle de $x^3 + x^2 + x - 1$.



Théorème (Berthé, Domenjoud, Jamet, P., 2013)

Pour $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ on a $S_\infty = P(v, 0, \Omega(v))$.

Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.



Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

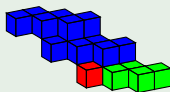


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

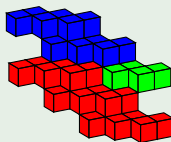


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

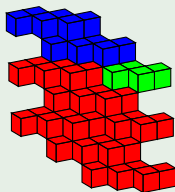


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

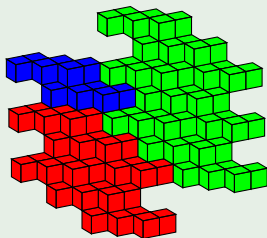


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisi v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

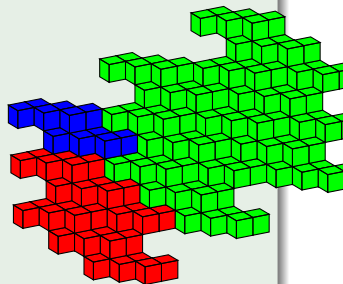


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisit v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

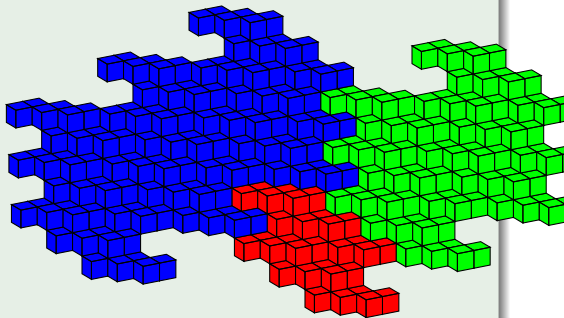


Définition

- $S_0 = \{0\}$.
- $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + t_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.
- $S_\infty = \bigcup_{n \geq 0} S_n \subset P(v, 0, \Omega(v))$.

Exemple 2 : Dragon

- On choisit v vecteur propre de $(M_1 M_3)$
- $\mathcal{M}_{2n} = (M_1 M_3)^n$.
- $v = (\beta, 2\beta + \beta^2, 1)$ où β est la racine réelle de $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.



Théorème (Berthé, Jamet, Jolivet, P., 2013)

Les ensembles S_n sont connexes pour tout $n \geq 0$.

Sketch de la proof

- On montre qu'un point de $(S_n + t_{n+1})$ est connexe à un point de S_n .
- On a $S_n = \{\sum_{i=0}^n \delta_i t_i \mid \delta_i \in \{0, 1\}\}$,
- On montre que le point $p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} t_i$ est voisin d'un des points de S_n .

Théorème (Berthé, Jamet, Jolivet, P., 2013)

Pour tout $v \in \mathcal{F}_3$ le plan $P(v, 0, \Omega(v))$ est connexe.

Théorème (Berthé, Jamet, Jolivet, P., 2013)

Les ensembles S_n sont connexes pour tout $n \geq 0$.

Sketch de la proof

- On montre qu'un point de $(S_n + t_{n+1})$ est connexe à un point de S_n .
- On a $S_n = \{\sum_{i=0}^n \delta_i t_i \mid \delta_i \in \{0, 1\}\}$,
- On montre que le point $p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} t_i$ est voisin d'un des points de S_n .

Théorème (Berthé, Jamet, Jolivet, P., 2013)

Pour tout $v \in \mathcal{F}_3$ le plan $P(v, 0, \Omega(v))$ est connexe.

Conjecture

Pour tout $v \in \mathcal{F}_3$, $S_\infty = P(v, 0, \Omega(v))$.

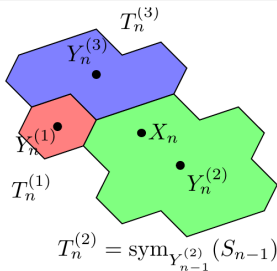
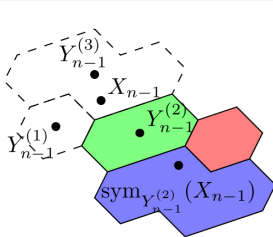
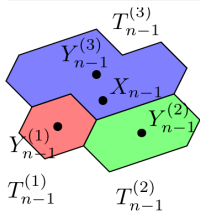
Définition (Version de Domenjoud et Vuillon pour $d=3$)

On se dote d'une suite directrice infinie $\Delta = \delta_1 \delta_2 \cdots \in \{1, 2, 3\}^\omega$.

On pose $S_0 = \{0\}$, $X_0 = 0$ et pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$: $T_0^{(i)} = \emptyset$ et $Y_0^{(i)} = \frac{1}{2}e_i$.

$$Y^{(i)} = \begin{cases} \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(X_{n-1}) & \text{si } i = \delta_n, \\ Y_{n-1}^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad X_n = Y_{n-1}^{(\delta_i)},$$

$$T^{(i)} = \begin{cases} \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(S_{n-1}) & \text{si } i = \delta_n, \\ T_{n-1}^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad S_n = S_{n-1} \cup \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(S_{n-1}).$$



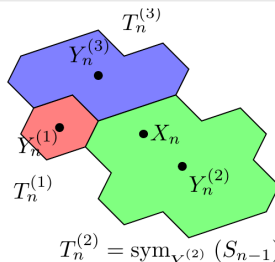
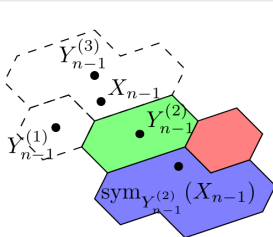
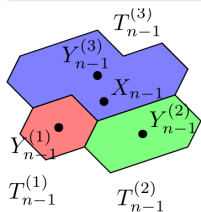
Définition (Version de Domenjoud et Vuillon pour $d=3$)

On se dote d'une suite directrice infinie $\Delta = \delta_1 \delta_2 \cdots \in \{1, 2, 3\}^\omega$.

On pose $S_0 = \{0\}$, $X_0 = 0$ et pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$: $T_0^{(i)} = \emptyset$ et $Y_0^{(i)} = \frac{1}{2}e_i$.

$$Y^{(i)} = \begin{cases} \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(X_{n-1}) & \text{si } i = \delta_n, \\ Y_{n-1}^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad X_n = Y_{n-1}^{(\delta_i)},$$

$$T^{(i)} = \begin{cases} \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(S_{n-1}) & \text{si } i = \delta_n, \\ T_{n-1}^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad S_n = S_{n-1} \cup \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(S_{n-1}).$$

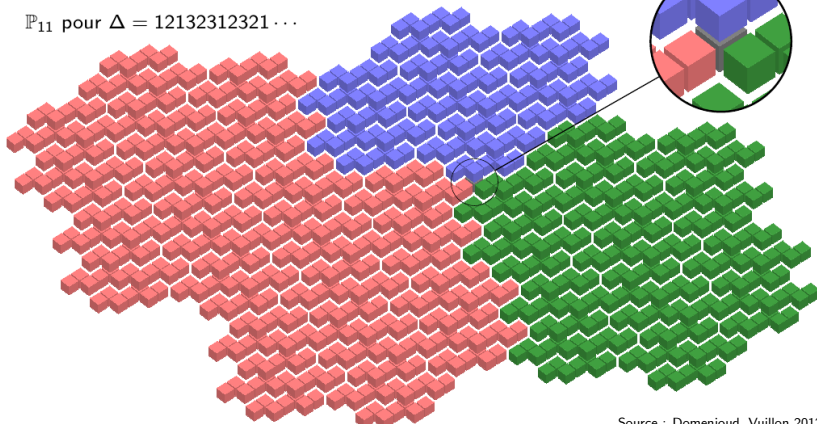


Source : Domenjoud, Vuillon 2012

Remarque

$v \in \mathcal{F}_3 \iff 1, 2 \text{ et } 3 \text{ apparaissent infiniment souvent dans } \Delta$

\mathbb{P}_{11} pour $\Delta = 12132312321 \dots$



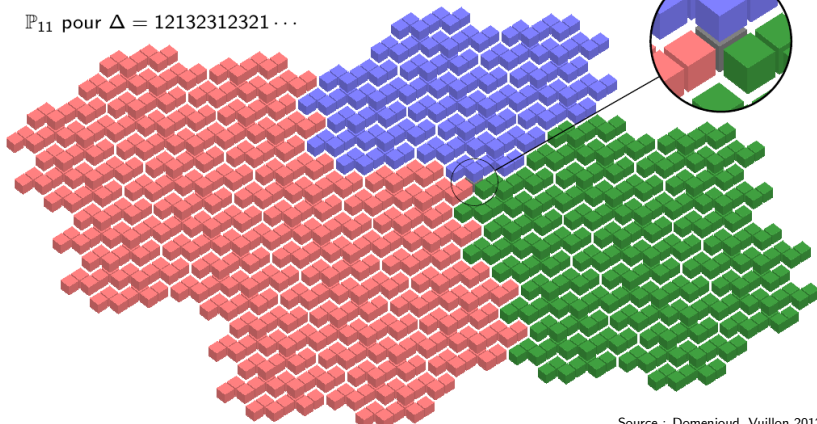
Source : Domenjoud, Vuillon 2012

On sait calculer une suite directe $\Delta = \delta_1 \delta_2 \dots$ à partir d'un vecteur de \mathcal{O}_+^3 de manière à ce que les constructions soient équivalentes.

Théorème (Domenjoud, Vuillon, 2012)

Pour tout $v \in \mathcal{F}_3, S_\infty \setminus \{0\}$ possède exactement 3 composantes connexes.

\mathbb{P}_{11} pour $\Delta = 12132312321 \dots$



Source : Domenjoud, Vuillon 2012

On sait calculer une suite directrice $\Delta = \delta_1 \delta_2 \dots$ à partir d'un vecteur de \mathcal{O}_+^3 de manière à ce que les constructions soient équivalentes.

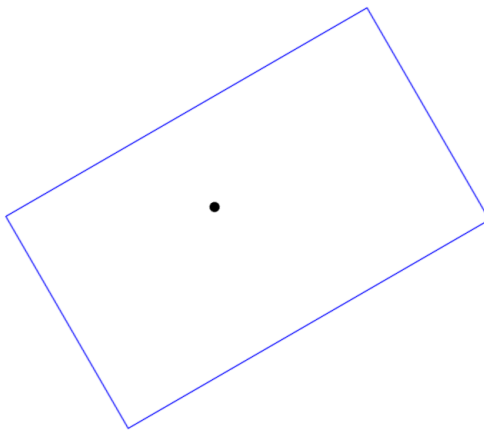
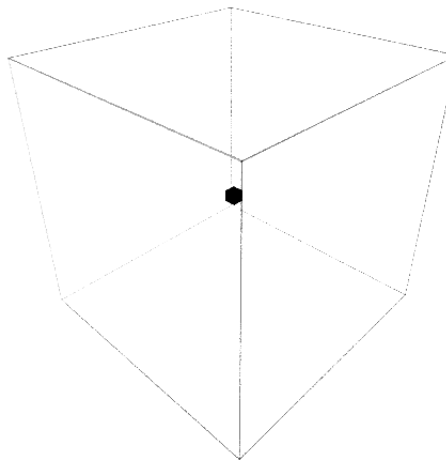
Théorème (Domenjoud, Vuillon, 2012)

Pour tout $v \in \mathcal{F}_3, S_\infty \setminus \{0\}$ possède exactement 3 composantes connexes.

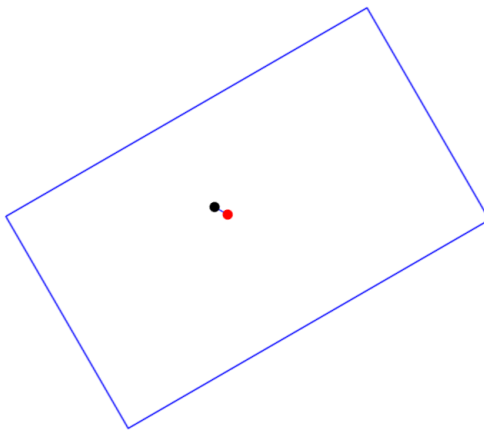
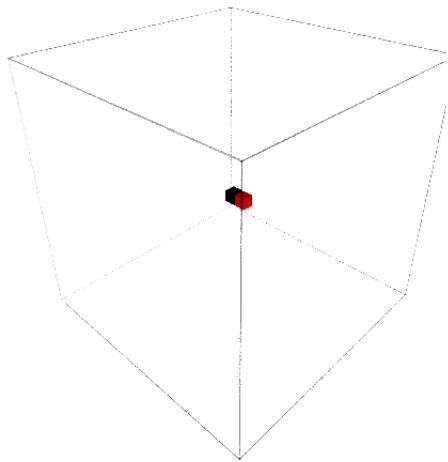
Corollaire

Pour tout $n \geq 0, S_n$ muni de la relation de connexité forme un arbre.

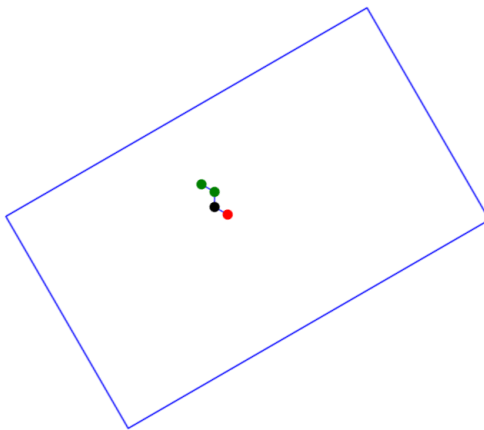
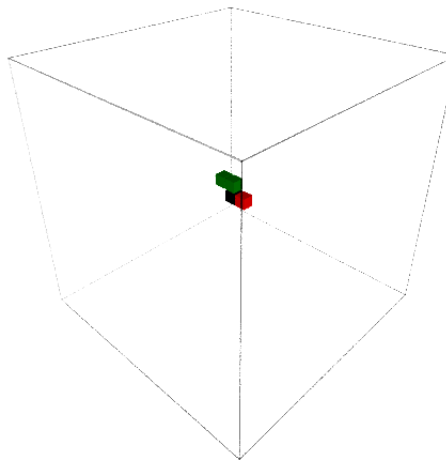
$$\Delta = 123133321\dots$$



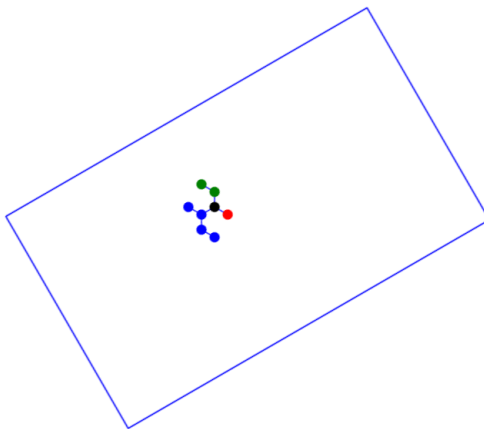
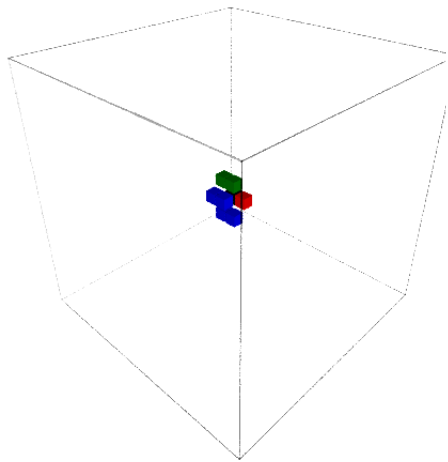
$$\Delta = 123133321\dots$$



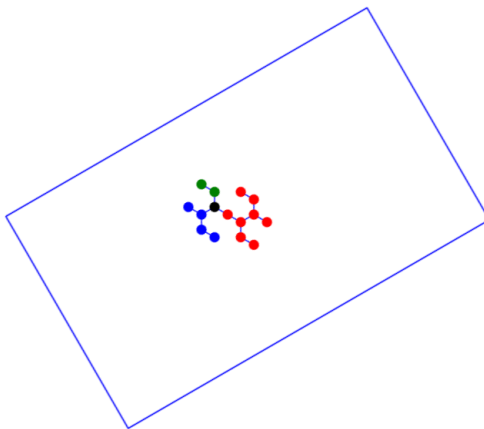
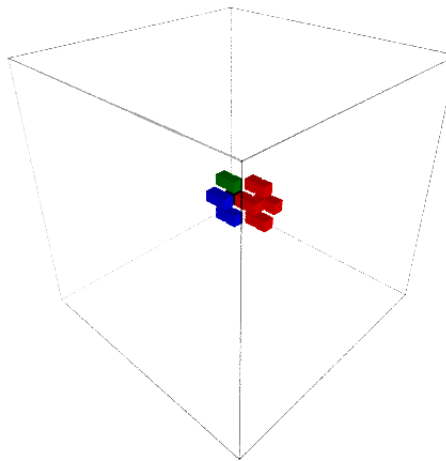
$\Delta = 123133321\dots$



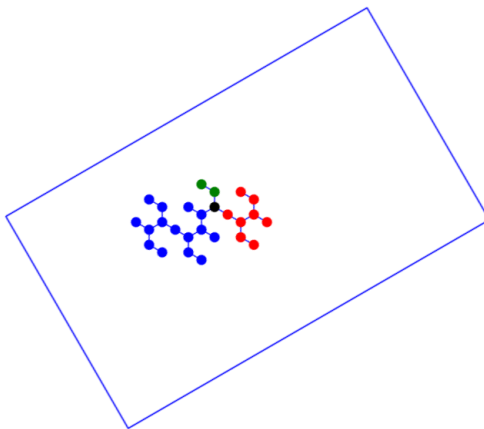
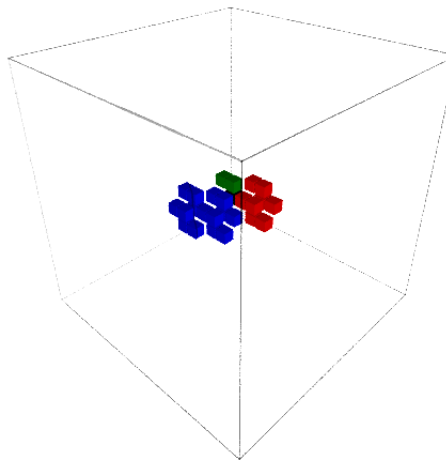
$$\Delta = 123133321\dots$$



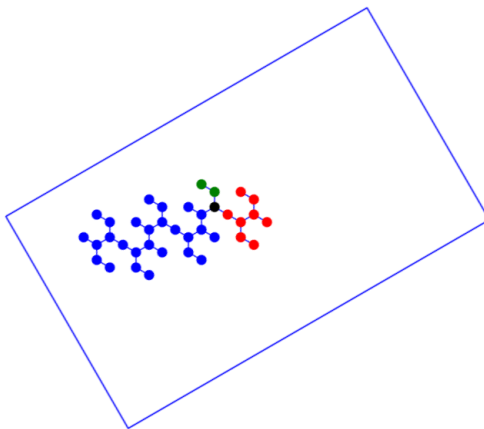
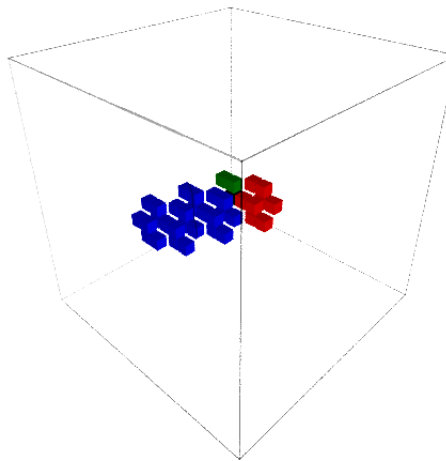
$$\Delta = 123133321\dots$$



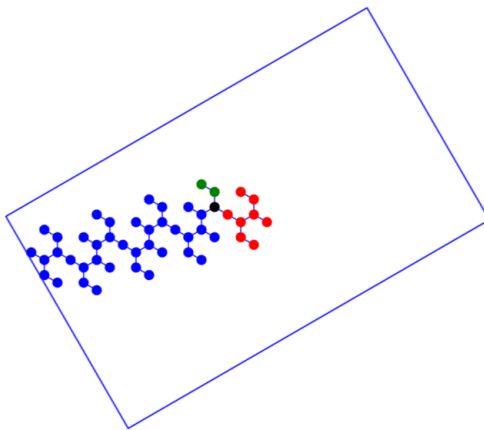
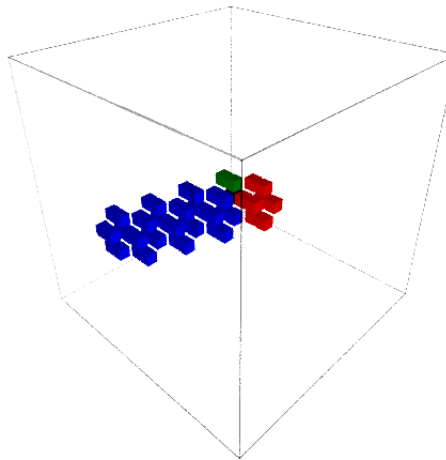
$$\Delta = 123133321\dots$$



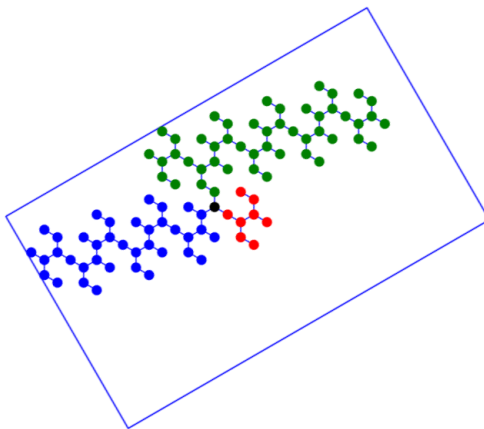
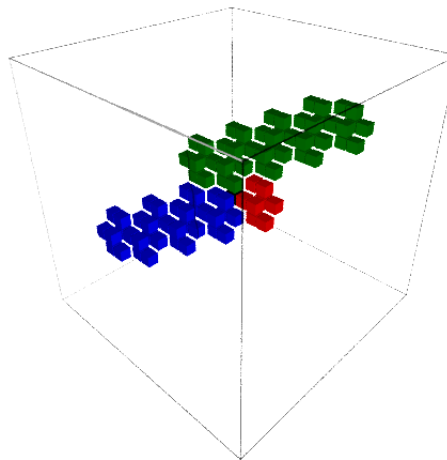
$$\Delta = 123133321\dots$$



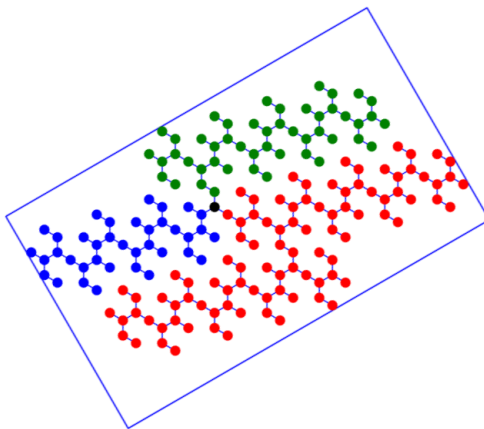
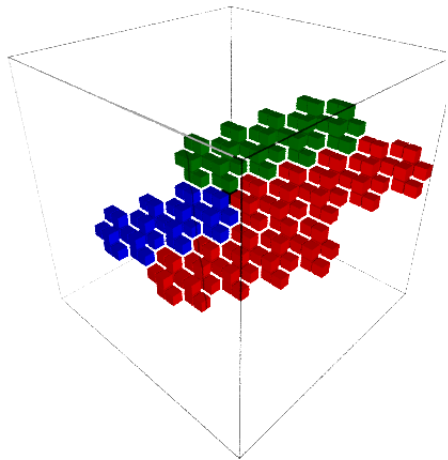
$$\Delta = 123133321\dots$$



$$\Delta = 123133321 \dots$$



$$\Delta = 123133321\dots$$



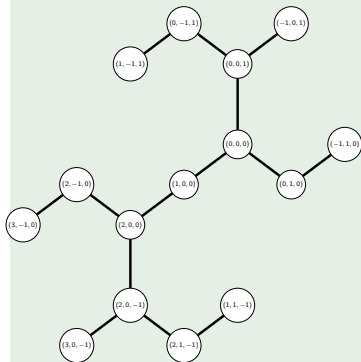
1 Mots, langage palindromique et pleinitude

2 Plans discets et épaisseur critique

3 **Résultat principal**

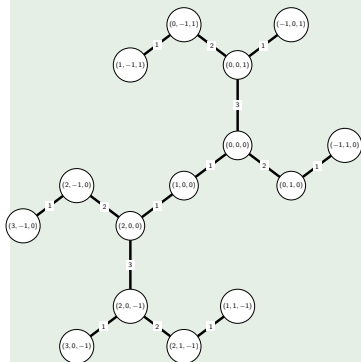
À partir de maintenant S_n est également un arbre dont les arêtes est étiquetées de la manière suivante : la letter a est aposée sur une arête reliant deux points distants de $\pm e_a$.

Exemples



À partir de maintenant S_n est également un arbre dont les arêtes est étiquettées de la manière suivante : la letter a est aposée sur une arête reliant deux points distants de $\pm e_a$.

Exemples



$$\text{Pal}(S_n) = \{\varepsilon, 1, 11, 121, 121121, 12321, 131, 131131, 12311321, 2, 2112, 232, 231132, 3, 3223\},$$

$$|\text{Pal}(S_n)| = 15,$$

$$|S_n| = 15.$$

Théorème (Domenjoud, Vuillon, P., 2013)

$$|\text{Pal}(S_n)| = |S_n|$$

Preuve

On construit une bijection entre les sommets de S_n et l'ensemble de ses palindromes.

Théorème (Domenjoud, Vuillon, P., 2013)

$$|\text{Pal}(S_n)| = |S_n|$$

Preuve

On construit une bijection entre les sommets de S_n est l'ensemble de ses palindromes.

La *différence de hauteur* de deux points x et y est la valeur $|\langle x, v \rangle - \langle y, v \rangle|$.

Lemme

Soit $w \in \mathcal{L}(S_n)$, toutes les paires de points $x, y \in S_n$ telles que $\pi(x, y) = w$ ont la même différence de hauteur.

Théorème (Domenjoud, Vuillon, P., 2013)

$$|\text{Pal}(S_n)| = |S_n|$$

Preuve

On construit une bijection entre les sommets de S_n et l'ensemble de ses palindromes.

La *différence de hauteur* de deux points x et y est la valeur $|\langle x, v \rangle - \langle y, v \rangle|$.

Lemme

Soit $w \in \mathcal{L}(S_n)$, toutes les paires de points $x, y \in S_n$ telles que $\pi(x, y) = w$ ont la même différence de hauteur.

Notation : pour tout $n \geq 1$, on pose $\sigma_n(x) = \text{sym}_{Y_{n-1}^{(\delta_n)}}(x) = 2Y_{n-1}^{(\delta_n)} - x$.

Lemme

Pour tout $n \geq 0$, on a $\pi(0, \sigma_n(0)) \in \text{Pal}$. De plus, $\pi(0, \sigma_n(0))$ est unioccurrent dans S_n .

Définition

Soit $\Phi : S_n \rightarrow \text{Pal}$
 $x \mapsto \pi(x, 0)^+$ où w^+ désigne la clôture palindromique de w .

Lemme

Pour tout $x \in S_n$, on a $\Phi(x) \in \text{Pal}(S_n)$.

Définition

Soit $\Phi : S_n \rightarrow \text{Pal}$
 $x \mapsto \pi(x, 0)^+$ où w^+ désigne la clôture palindromique de w .

Lemme

Pour tout $x \in S_n$, on a $\Phi(x) \in \text{Pal}(S_n)$.

Définition

Étant donné un palindrome $p \in \text{Pal}(S_n)$, on note $n_p \leq n$ le plus petit entier tel que $p \in \mathcal{L}(S_{n_p})$.

Soit $\Psi : \text{Pal}(S_n) \rightarrow S_n$
 $p \mapsto$ l'unique point de $S_{n_p} \setminus S_{n_p-1}$ d'où on peut lire p .

Lemme

La fonction Ψ est bien définie, de plus Φ et Ψ sont l'inverse l'une de l'autre.

Condition de maximalité de $|\text{Pal}(S_n)|$.

Propriétés des langage $\mathcal{L}(S_n)$.

Montrer que $S_\infty = P(v, 0, \Omega(v))$.

Topologie de $P(v, \mu, \Omega(v))$, nombre de composantes connexes en fonction de μ .

Autres connexités ?