Convexité discrète et combinatoire des mots

Xavier Provençal

LAMA
Laboratoire de Mathématiques

LIRMM
Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier

Fonds de recherche sur la nature et les technologies
Québec

17 mai, 2010

Polyominoes

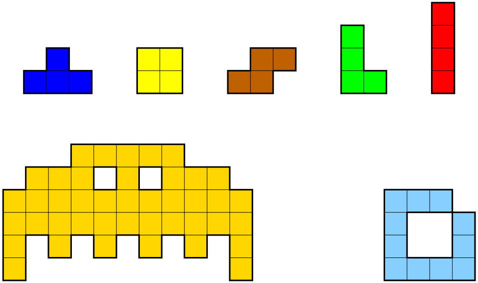
Définition

Un polyomino un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ *dont le bord topologique de l'ensemble des carrés unitaires associés (digital squares) est un courbe de Jordan.*

Polyominoes

Définition

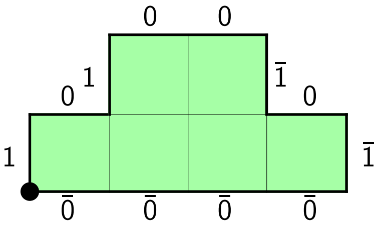
Un polyomino un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ dont le bord topologique de l'ensemble des carrés unitaires associés (digital squares) est un courbe de Jordan.



Freeman chain code

$$\Sigma = \{0, \bar{0}, 1, \bar{1}\}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0 \rightarrow & 1 \uparrow \\ \bar{0} \leftarrow & \bar{1} \downarrow \end{array}}$$



$$w = 1\,0\,1\,0\,0\,\bar{1}\,0\,\bar{1}\,\bar{0}\,\bar{0}\,\bar{0}\,\bar{0}.$$

Le mot w est appelé *mot de contour* du polyomino P.

Mots de contours

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ on peut (entre autre) :

Mots de contours

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ on peut (entre autre) :

- Déterminer si w est le mot de contour d'un polyomino en temps $O(n)$. (Brlek, Koskas, P., 2009)

Mots de contours

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ on peut (entre autre) :

- Déterminer si w est le mot de contour d'un polyomino en temps $O(n)$. (Brlek, Koskas, P., 2009)

Dans le cas où w est un mot de contour d'un polyomino P :

- Déterminer si P pave le plan par translation,

Mots de contours

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ on peut (entre autre) :

- Déterminer si w est le mot de contour d'un polyomino en temps $O(n)$. (Brlek, Koskas, P., 2009)

Dans le cas où w est un mot de contour d'un polyomino P :

- Déterminer si P pave le plan par translation,
  - de manière carrée en temps $O(n)$ (Brlek, Fédou, P., 2009),
  - de manière hexagonale en temps $(n(\log(n))^3)$ (P., 2008).

Mots de contours

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ on peut (entre autre) :

- Déterminer si w est le mot de contour d'un polyomino en temps $O(n)$. (Brlek, Koskas, P., 2009)

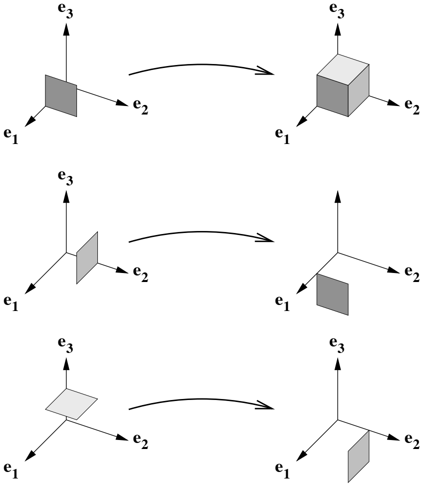
Dans le cas où w est un mot de contour d'un polyomino P :

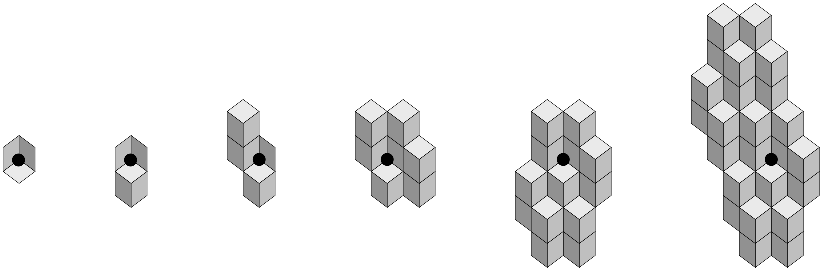
- Déterminer si P pave le plan par translation,
  - de manière carrée en temps $O(n)$ (Brlek, Fédou, P., 2009),
  - de manière hexagonale en temps $(n(\log(n))^3)$ (P., 2008).
- Étudier la convexité de P...

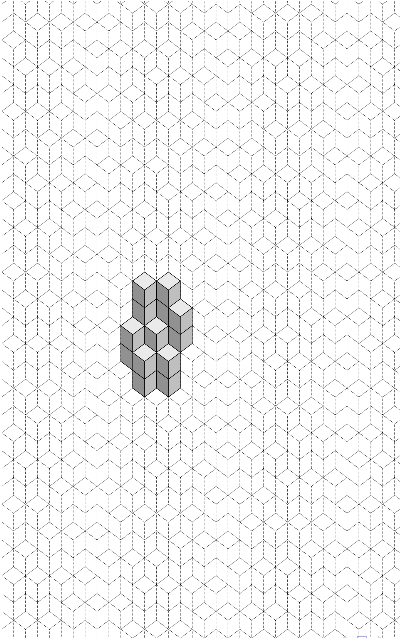
Étude du bord de section de plan discrets

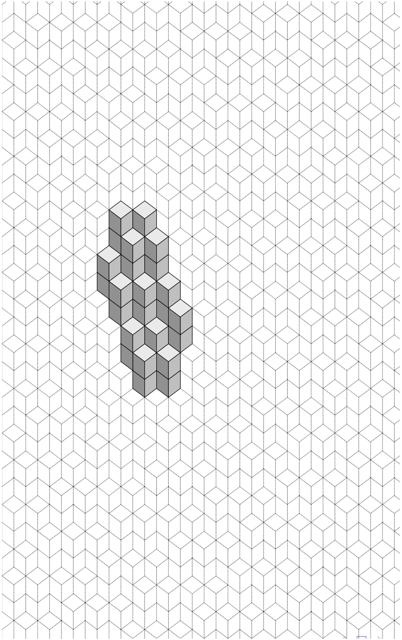
Étant donné un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, on sait générer une suite de morphismes $(\sigma_i)_{i \geq 0}$ sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$, telle que la suite $(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_n(1))_{n \geq 0}$ approxime la droite définie par $\vec{v}$.

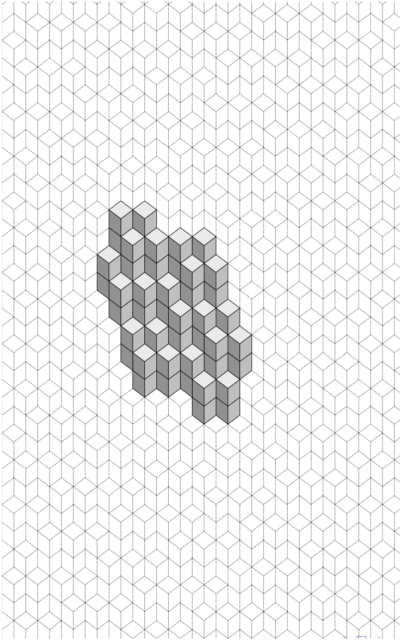
$$\sigma : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 12 \\ 2 \longrightarrow 13 \\ 3 \longrightarrow 1 \end{array}$$

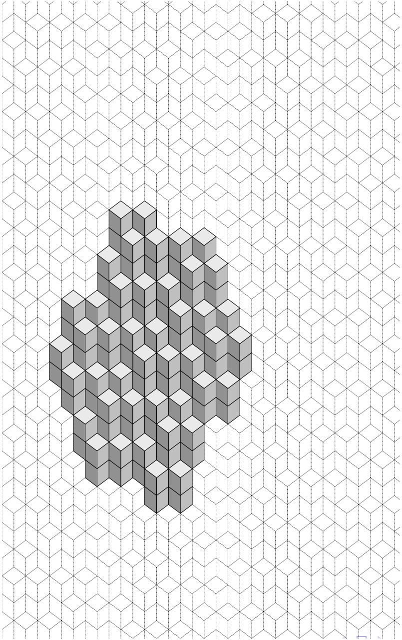


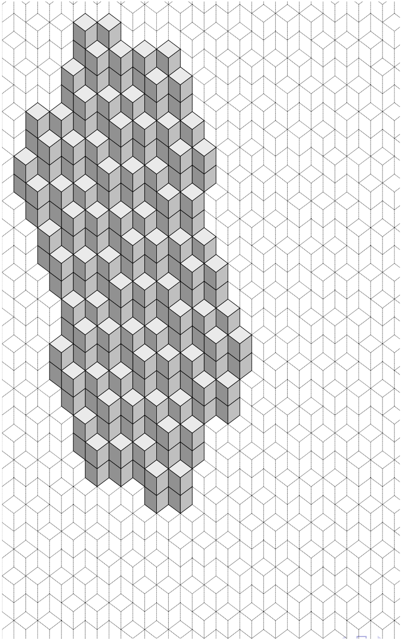


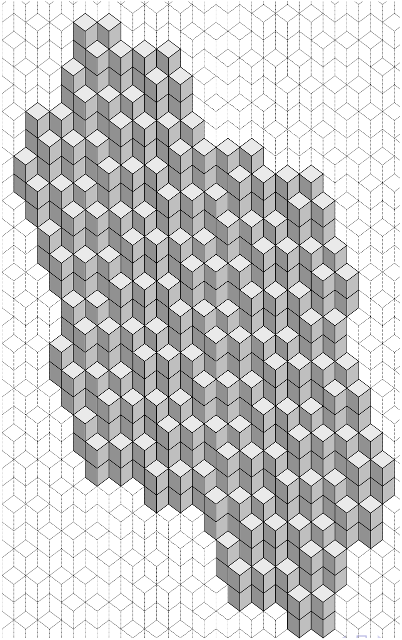










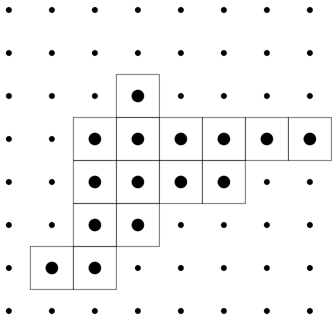


Définition

Un polyomino P est digitalement convexe si son enveloppe convexe Euclidienne E est telle que $E \cap \mathbb{Z}^2 = P$.

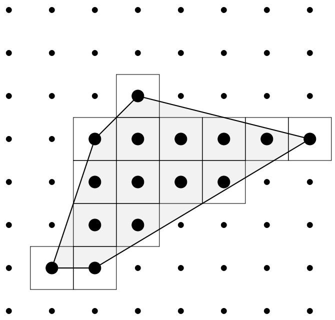
Définition

Un polyomino P est digitalement convexe si son enveloppe convexe Euclidienne E est telle que $E \cap \mathbb{Z}^2 = P$.



Définition

Un polyomino P est digitalement convexe si son enveloppe convexe Euclidienne E est telle que $E \cap \mathbb{Z}^2 = P$.



HV-convextité

Définition

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ *est dit H-convexe si* $(x_0, y), (x_1, y) \in S$ *alors pour tout* $x_0 \leq x \leq x_1$ *on a que* $(x, y) \in S$.

HV-convextité

Définition

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ *est dit H-convexe si* $(x_0, y), (x_1, y) \in S$ *alors pour tout* $x_0 \leq x \leq x_1$ *on a que* $(x, y) \in S$.

Définition

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ *est dit V-convexe si* $(x, y_0), (x, y_1) \in S$ *alors pour tout* $y_0 \leq y \leq y_1$ *on a que* $(x, y) \in S$.

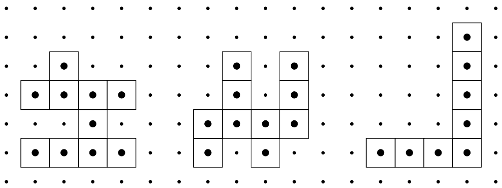
HV-convextité

Définition

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ est dit H-convexe si $(x_0, y), (x_1, y) \in S$ alors pour tout $x_0 \leq x \leq x_1$ on a que $(x, y) \in S$.

Définition

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ est dit V-convexe si $(x, y_0), (x, y_1) \in S$ alors pour tout $y_0 \leq y \leq y_1$ on a que $(x, y) \in S$.



(a) (b) (c)

Mots de quadrant

Définition

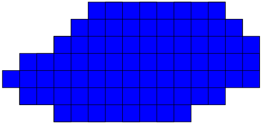
Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Mots de quadrant

Définition

Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Le mot de contour d'un polyomino *hv*-convexe admet exactement 4 mots de quadrant :



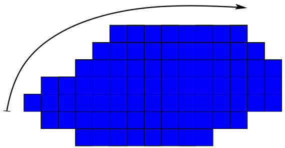
Mots de quadrant

Définition

Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Le mot de contour d'un polyomino *hv*-convexe admet exactement 4 mots de quadrant :

un nord-ouest, sur l'alphabet $\{0, 1\}$,



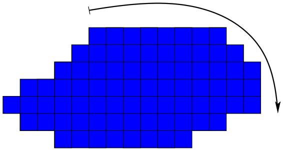
Mots de quadrant

Définition

Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Le mot de contour d'un polyomino *hv*-convexe admet exactement 4 mots de quadrant :

un nord-ouest, sur l'alphabet $\{0, 1\}$,
un nord-est, sur l'alphabet $\{\bar{1}, 0\}$,

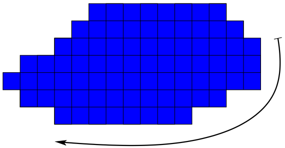


Définition

Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Le mot de contour d'un polyomino *hv*-convexe admet exactement 4 mots de quadrant :

un nord-ouest, sur l'alphabet $\{0, 1\}$,
un nord-est, sur l'alphabet $\{\bar{1}, 0\}$,
un sud-est, sur l'alphabet $\{\bar{0}, \bar{1}\}$,



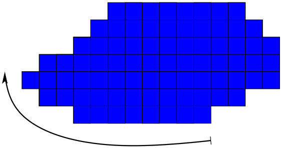
Mots de quadrant

Définition

Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Le mot de contour d'un polyomino *hv*-convexe admet exactement 4 mots de quadrant :

un nord-ouest, sur l'alphabet $\{0, 1\}$,
un nord-est, sur l'alphabet $\{\bar{1}, 0\}$,
un sud-est, sur l'alphabet $\{\bar{0}, \bar{1}\}$,
un sud-ouest, sur l'alphabet $\{1, \bar{0}\}$.

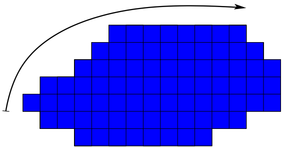


Définition

Étant donnée un mot de contour w, les facteurs non-extensible de w écrits sur deux lettres sont appelés mots de quadrant.

Le mot de contour d'un polyomino *hv*-convexe admet exactement 4 mots de quadrant :

un nord-ouest, sur l'alphabet $\{0, 1\}$,
un nord-est, sur l'alphabet $\{\bar{1}, 0\}$,
un sud-est, sur l'alphabet $\{\bar{0}, \bar{1}\}$,
un sud-ouest, sur l'alphabet $\{1, \bar{0}\}$.



Mots de Lyndon

Définition

Un mot w est de Lyndon si pour tout $u, v \in \Sigma^+$ on a

$$w = uv \implies w < v.$$

$(w = uv \implies w < vu)$

Mots de Lyndon

Définition

Un mot w est de Lyndon si pour tout $u, v \in \Sigma^+$ on a

$$w = uv \implies w < v.$$

$(w = uv \implies w < vu)$

Par exemple, étant donné les mots

$$w_1 = 00100101, w_2 = 0010 \text{ et } w_3 = 0000,$$

seul w_1 est un mot de Lyndon.

Mots de Lyndon

Theorem (Lyndon)

Tout mot $w \in \Sigma^*$ admet une unique factorisation en mots de Lyndon décroissants.

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ et $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$ sont des mots de Lyndon.

Mots de Lyndon

Theorem (Lyndon)

Tout mot $w \in \Sigma^*$ admet une unique factorisation en mots de Lyndon décroissants.

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ et $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$ sont des mots de Lyndon.

Par exemple, étant donné le mot

$$w = 1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0$$

Mots de Lyndon

Theorem (Lyndon)

Tout mot $w \in \Sigma^*$ admet une unique factorisation en mots de Lyndon décroissants.

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ et $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$ sont des mots de Lyndon.

Par exemple, étant donné le mot

$$\begin{aligned} w &= 1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ &= (1)^2 \cdot (0\,1\,1)^2 \cdot (0\,0\,1\,0\,0\,1\,1)^1 \cdot (0)^3. \end{aligned}$$

Theorem (Lyndon)

Tout mot $w \in \Sigma^*$ admet une unique factorisation en mots de Lyndon décroissants.

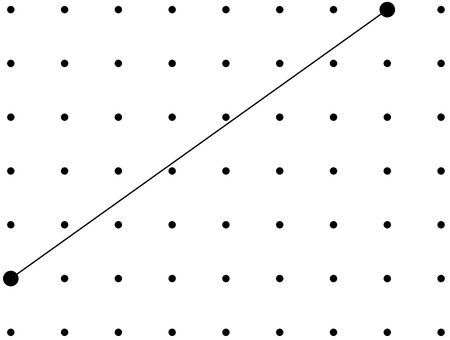
$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ et $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$ sont des mots de Lyndon.

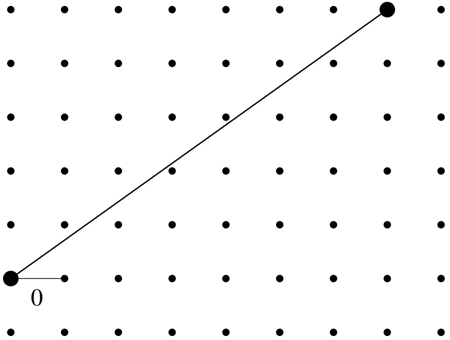
Par exemple, étant donné le mot

$$\begin{aligned} w &= 1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ &= (1)^2 \cdot (0\,1\,1)^2 \cdot (0\,0\,1\,0\,0\,1\,1)^1 \cdot (0)^3. \\ &= (1, 1, 011, 011, 0010011, 0, 0, 0)_{\mathbf{Lyn}} \end{aligned}$$

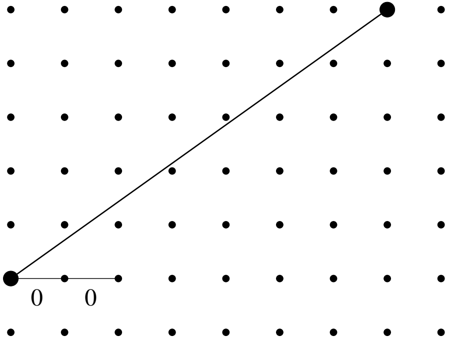
Mots de Christoffel



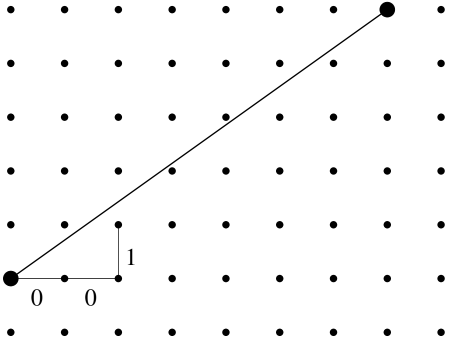
Mots de Christoffel



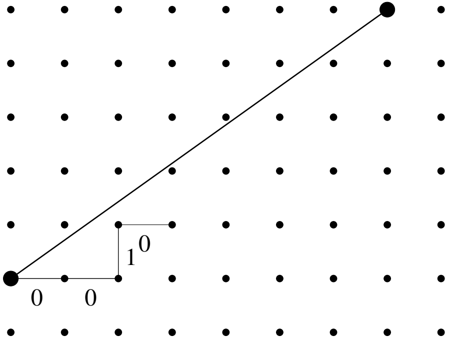
Mots de Christoffel

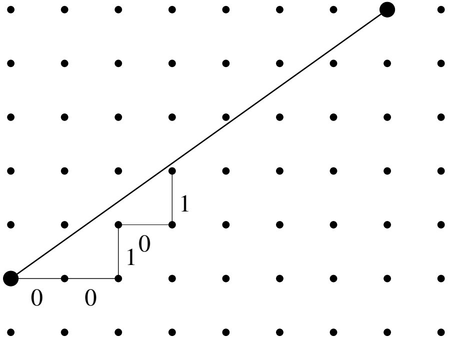


Mots de Christoffel

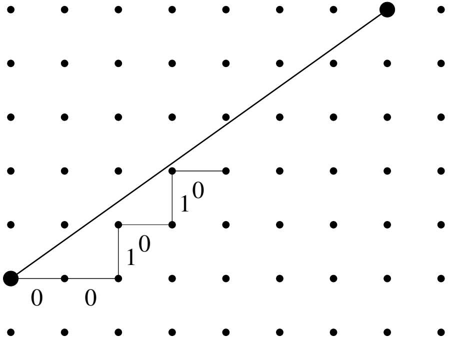


Mots de Christoffel

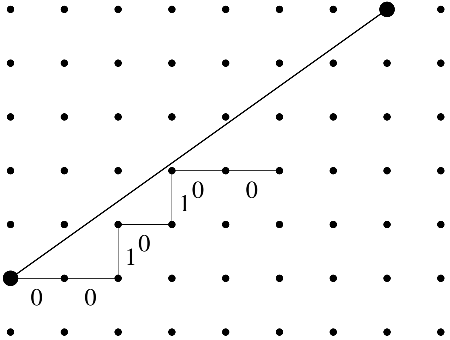



0
0
1
0
1

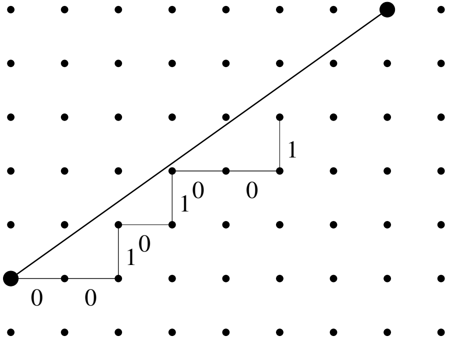
Mots de Christoffel



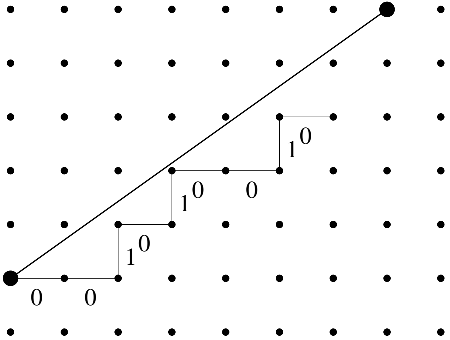
Mots de Christoffel



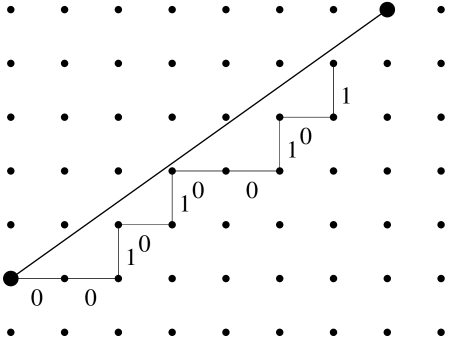
Mots de Christoffel



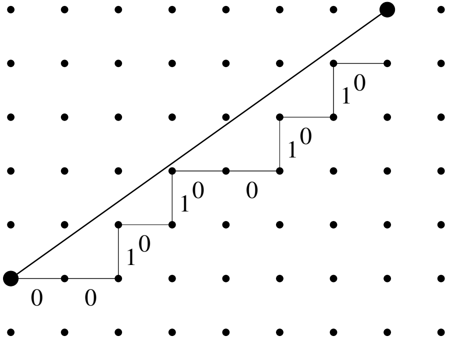
Mots de Christoffel



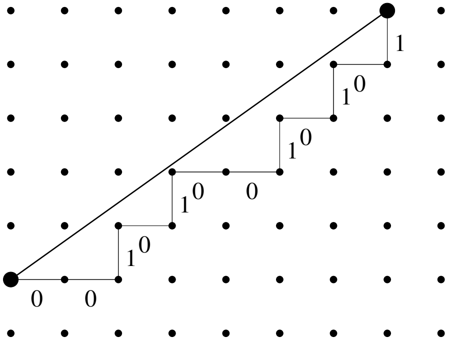
Mots de Christoffel



Mots de Christoffel



Mots de Christoffel



001010010101.

Theorème (Borel et Laubie, 1993)

Soit u un mot de Christoffel,

- *u est un mot de Lyndon.*

Propriétés des mots de Christoffel

Theorème (Borel et Laubie, 1993)

Soit u un mot de Christoffel,

- *u est un mot de Lyndon.*
- *Si v est un mot de Christoffel alors*

$$u < v \iff \rho(u) < \rho(v).$$

Propriétés des mots de Christoffel

Theorème (Borel et Laubie, 1993)

Soit u un mot de Christoffel,

- *u est un mot de Lyndon.*
- *Si v est un mot de Christoffel alors*

$$u < v \iff \rho(u) < \rho(v).$$

- *Si u est non-trivial alors il existe une unique paire (x, y) de mots de Christoffel telle que $w = xy$.*

Theorème (Borel et Laubie, 1993)

Soit u un mot de Christoffel,

- *u est un mot de Lyndon.*
- *Si v est un mot de Christoffel alors*

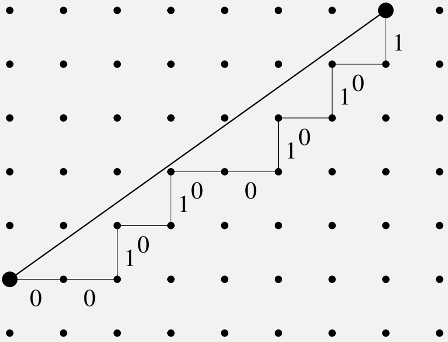
$$u < v \iff \rho(u) < \rho(v).$$

- *Si u est non-trivial alors il existe une unique paire (x, y) de mots de Christoffel telle que $w = xy$.*

Cette factorisation est appelée la *factorisation standard*, est notée $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ et dans ce cas :

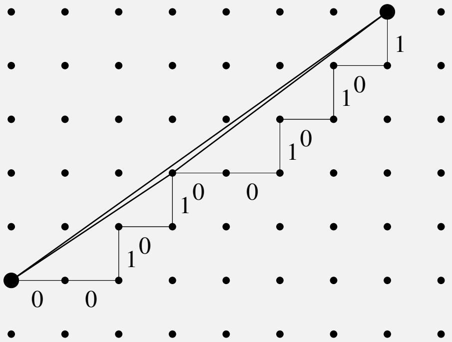
$$w = (u, v)_{\mathbf{C}} \implies u < w < v.$$

Propriétés des mots de Christoffel



Cette factorisation est appelée la *factorisation standard*, est notée $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ et dans ce cas :

$$w = (u, v)_{\mathbf{C}} \implies u < w < v.$$



Cette factorisation est appelée la *factorisation standard*, est notée $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ et dans ce cas :

$$w = (u, v)_{\mathbf{C}} \implies u < w < v.$$

Caractérisation combinatoire de la convexité

Theorem (Brlek, Lachaud, P., Reutenauer)

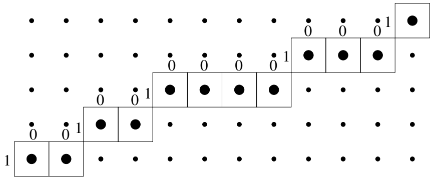
Un polyomino hv-convexe P est digitalement convexe ssi la factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ *de chacun de ses mots de quadrants ne contient que des mots de Christoffel.*

Theorem (Brlek, Lachaud, P., Reutenauer)

Un polyomino hv-convexe P est digitalement convexe ssi la factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ de chacun de ses mots de quadrants ne contient que des mots de Christoffel.

Preuve.

($\Rightarrow$) Supposons que w code une partie convexe.

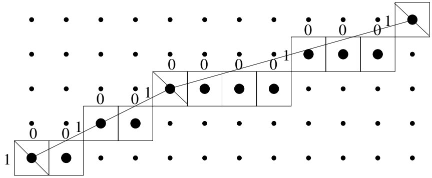


Theorem (Brlek, Lachaud, P., Reutenauer)

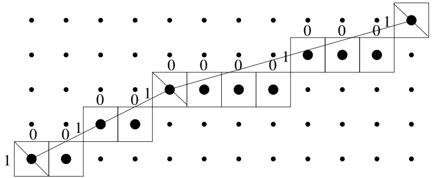
Un polyomino hv-convexe P est digitalement convexe ssi la factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ de chacun de ses mots de quadrants ne contient que des mots de Christoffel.

Preuve.

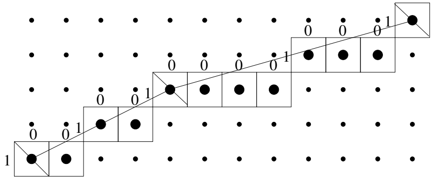
(⇒) Supposons que w code une partie convexe. L'enveloppe convexe est un polygone dont les sommets font partis du chemin codé par w.



Caractérisation combinatoire de la convexité



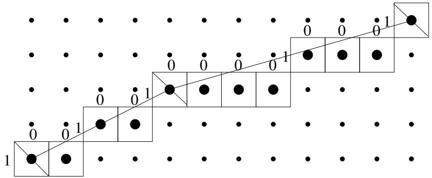
$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$



$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ la séquence ordonnée d'arêtes formant la partie nord-ouest de l'enveloppe convexe.

Caractérisation combinatoire de la convexité

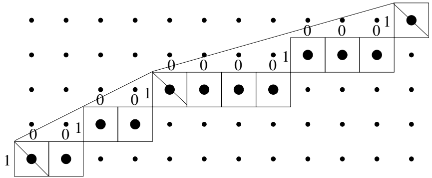


$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ la séquence ordonnée d'arêtes formant la partie nord-ouest de l'enveloppe convexe.

Pour $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ on pose u_i le mot codant le déterminé par e_i. On a alors $w = u_1 u_2 \cdots u_k$.

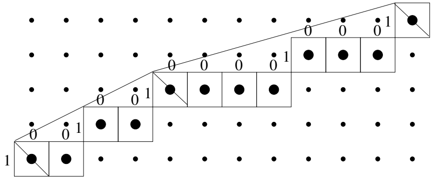
Caractérisation combinatoire de la convexité



$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ la séquence ordonnée d'arêtes formant la partie nord-ouest de l'enveloppe convexe.

Pour $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ on pose u_i le mot codant le déterminé par e_i. On a alors $w = u_1 u_2 \cdots u_k$.



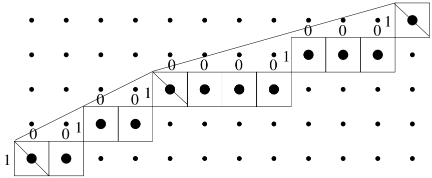
$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ la séquence ordonnée d'arêtes formant la partie nord-ouest de l'enveloppe convexe.

Pour $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ on pose u_i le mot codant le déterminé par e_i. On a alors $w = u_1 u_2 \cdots u_k$.

Pour chaque u_i il existe un mot de Christoffel primitif l_i tel que $u_i = l_i^{n_i}$.

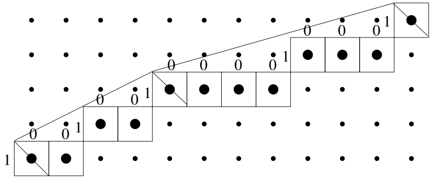
Caractérisation combinatoire de la convexité



$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

On pose s_i la pente du segment e_i.

Caractérisation combinatoire de la convexité

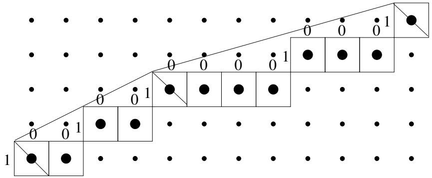


$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

On pose s_i la pente du segment e_i.

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ forme l'enveloppe convexe, $s_i > s_{i+1}$.

Caractérisation combinatoire de la convexité

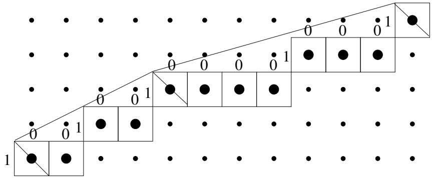


$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

On pose s_i la pente du segment e_i.

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ forme l'enveloppe convexe, $s_i > s_{i+1}$.

$$\rho(l_i) = \rho(u_i) = s_i$$

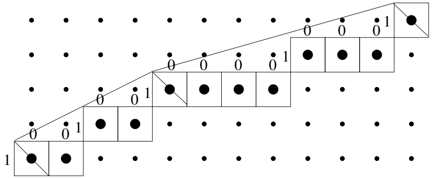


$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

On pose s_i la pente du segment e_i.

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ forme l'enveloppe convexe, $s_i > s_{i+1}$.

$$\rho(l_i) = \rho(u_i) = s_i > s_i + 1 = \rho(u_{i+1}) = \rho(l_{i+1}).$$



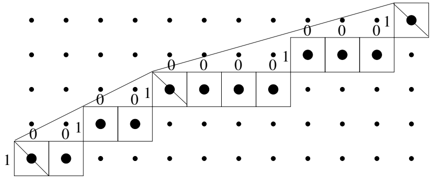
$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

On pose s_i la pente du segment e_i.

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ forme l'enveloppe convexe, $s_i > s_{i+1}$.

$$\rho(l_i) = \rho(u_i) = s_i > s_i + 1 = \rho(u_{i+1}) = \rho(l_{i+1}).$$

$$l_i > l_{i+1}.$$



$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1.$$

On pose s_i la pente du segment e_i.

Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ forme l'enveloppe convexe, $s_i > s_{i+1}$.

$$\rho(l_i) = \rho(u_i) = s_i > s_i + 1 = \rho(u_{i+1}) = \rho(l_{i+1}).$$

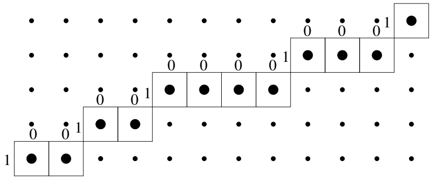
$$l_i > l_{i+1}.$$

$w = u_1 u_2 \cdots u_k = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ forme l'unique factorisation en mots de Lyndon décroissants de w.

$(\Leftarrow)$ Supposons que la factorisastion en mots de Lyndon décroissants de $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est formée uniquement de mots de Christoffel.

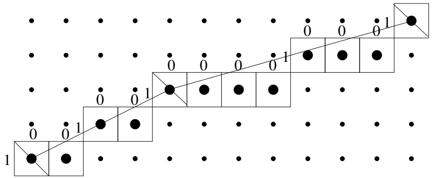
($\Leftarrow$) Supposons que la factorisastion en mots de Lyndon décroissants de $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est formée uniquement de mots de Christoffel.

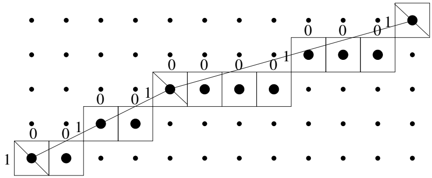
Pour chaque i, soit e_i le segment de droite reliant le point de départ de $l_i^{n_i}$ à son point d'arrivé.



($\Leftarrow$) Supposons que la factorisastion en mots de Lyndon décroissants de $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est formée uniquement de mots de Christoffel.

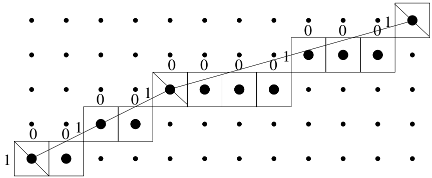
Pour chaque i, soit e_i le segment de droite reliant le point de départ de $l_i^{n_i}$ à son point d'arrivé.





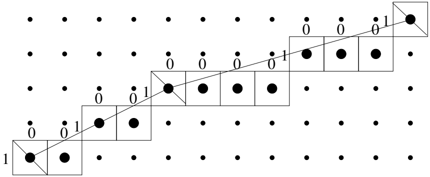
Comme les l_i sont des mots de Christoffel :

Caractérisation combinatoire de la convexité



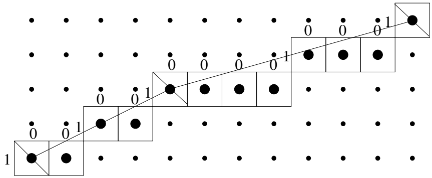
Comme les l_i sont des mots de Christoffel :

- Le chemin codé par $l_i^{n_i}$ ne traverse jamais e_i.



Comme les l_i sont des mots de Christoffel :

- Le chemin codé par $l_i^{n_i}$ ne traverse jamais e_i.
- Il n'existe aucun point à coordonnées entières entre le chemin codé par $l_i^{n_i}$ et e_i.

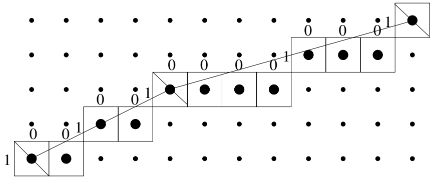


Comme les l_i sont des mots de Christoffel :

- Le chemin codé par $l_i^{n_i}$ ne traverse jamais e_i.
- Il n'existe aucun point à coordonnées entières entre le chemin codé par $l_i^{n_i}$ et e_i.

$$l_i > l_{i+1} \implies \rho(l_i^{n_i}) > \rho(l_{i+1}^{n_{i+1}})$$

Caractérisation combinatoire de la convexité

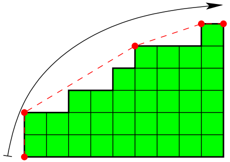


Comme les l_i sont des mots de Christoffel :

- Le chemin codé par $l_i^{n_i}$ ne traverse jamais e_i.
- Il n'existe aucun point à coordonnées entières entre le chemin codé par $l_i^{n_i}$ et e_i.

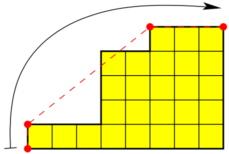
$$l_i > l_{i+1} \implies \rho(l_i^{n_i}) > \rho(l_{i+1}^{n_{i+1}})$$

$(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ est l'enveloppe convexe du mot convexe w.



1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0

$(1, 1, 00100101, 0001, 0)_{\mathsf{Lyn}}$



1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0

$(1, 000111001, 000)_{\mathsf{Lyn}}$

Définition

On pose **CV** *l'ensemble des mots convexes sur l'alphabet* $\mathcal{A}$, *c'est-à-dire :*

$$\mathbf{CV} = \{(l_1, l_2, \dots, l_m)_{\mathbf{Lyn}} \in \mathcal{A}^* \mid \textit{tous les } l_i \textit{ sont Christoffel}\}.$$

Énumération des mots convexes

Corollaire (Reutenauer, 2008)

Le nombre de mots convexes de longueur n est donné par la série :

$$\prod_{n\geq 1} a_n x^n = \prod_{n\geq 1} \left(\frac{1}{1-x^n}\right)^{\phi'(n)} = \prod_{n\geq 1} \left(\sum_{k\geq 0} \binom{\phi'(n)+k-1}{k} x^{kn}\right).$$

Énumération des mots convexes

Corollaire (Reutenauer, 2008)

Le nombre de mots convexes de longueur n est donné par la série :

$$\prod_{n\geq 1} a_n x^n = \prod_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-x^n}\right)^{\phi'(n)} = \prod_{n\geq 1}\left(\sum_{k\geq 0}\binom{\phi'(n)+k-1}{k}x^{kn}\right).$$

$$a_m = \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_m) \\ 1n_1+2n_2+\cdots+mn_m=m \\ n_1,n_2,\ldots,n_m\geq 0}} \prod_{1\leq i\leq m}\binom{\phi'(n_i)+k-1}{k}$$

Theorem (Ivic, Koplowitz et Zunic, 1994)

Il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que

$$C_1 m^{2/3} \leq \log a_m \leq C_2 m^{2/3},$$

Tests de convexité

- Un test de convexité discrète en, linéaire en temps, basé sur la reconnaissance des DSS a été proposé dans Debled-Rennesson, Rémy, Rouyer-Degli 2003.

Tests de convexité

- Un test de convexité discrète en, linéaire en temps, basé sur la reconnaissance des DSS a été proposé dans Debled-Rennesson, Rémy, Rouyer-Degli 2003.
- Étant un mot w de longueur n, peut-on tester si $w \in \mathbf{CV}$ en temps $O(n)$?

Algorithme de Duval

$$w = \;1\;\;1\;\;0\;\;1\;\;1\;\;0\;\;1\;\;1\;\;0\;\;0\;\;1\;\;0\;\;0\;\;1\;\;1\;\;0\;\;0\;\;0.$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{rcccccccccccccccccc}
i: & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
w = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & \uparrow & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccc}
i: & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & & \\
w = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & \uparrow & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{ll}
i : & \downarrow \\
w = & 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0. \\
j : & \quad\ \uparrow
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{ll}
i: & \downarrow \\
w = & 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0. \\
j: & \quad\quad\ \uparrow
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{ll}
i: & \downarrow \\
w = & 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0. \\
j: & \uparrow
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
i: & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & \\
w = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & \uparrow & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{ll} i: & \quad\quad\quad\;\; \downarrow \\ w = & 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0. \\ j: & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \uparrow \end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
i: & & & & \downarrow & & & & & & & & & & & & \\
w = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & & & \uparrow & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
i: & & & & & \downarrow & & & & & & & & & & & \\
w = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & & & & \uparrow & & & & & & & &
\end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
i: & \downarrow & & & & & & & & & \\
w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & \uparrow & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{lcccccccccc} i: & & \downarrow & & & & & & & & \\ w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\ j: & & & \uparrow & & & & & & & \end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
i: & \downarrow & & & & & & & & & \\
w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
i: & & \downarrow & & & & & & & & \\
w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & \uparrow & & & & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{rcccccccccc}
i: & & & \downarrow & & & & & & & \\
w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & & \uparrow & & & &
\end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

$$\begin{array}{lcccccccccc} i: & & & & \downarrow & & & & & & \\ w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\ j: & & & & & & & \uparrow & & & \end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
i: & \downarrow & & & & & & & & & \\
w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & & & & \uparrow & &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{llllllllllll}
i: & & \downarrow & & & & & & & & \\
w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & & & & & & & \uparrow &
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2$$

$$\begin{array}{lcccccccccc} i: & & & \downarrow & & & & & & & \\ w = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \\ j: & & & & & & & & & & \uparrow \end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2 \cdot (0010011)^1$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{lccc} i: & \downarrow & & \\ w = & 0 & 0 & 0. \\ j: & & \uparrow & \end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2 \cdot (0010011)^1$$

Algorithme de Duval

$$\begin{array}{lccc} i: & & \downarrow & \\ w = & 0 & 0 & 0. \\ j: & & & \uparrow \end{array}$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2 \cdot (0010011)^1$$

Algorithme de Duval

$$
\begin{array}{lccc}
i: & & \downarrow & \\
w = & 0 & 0 & 0. \\
j: & & & \uparrow
\end{array}
$$

- Si $w_i = w_j$ alors incrémenter i et j.
- Si $w_i < w_j$ alors incrémenter j et remettre i au début.
- Si $w_i > w_j$ alors $w = l_1^{n_1} w'$ avec $l_1 = j - i$ et $n_1 = \left\lfloor \frac{(j-1)}{(j-i)} \right\rfloor$.

$$w = (1)^2 \cdot (011)^2 \cdot (0010011)^1 \cdot (0)^3.$$

- Linéaire en fonction de la longueur de w.

Détection des mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $p, q \in \mathbb{N}$, deux nombres relativement premiers, le mot de Christoffel $\mathcal{C}_{p/q} = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$ de pente p/q est défini par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \mathit{if} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \mathit{if} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

Détection des mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $p, q \in \mathbb{N}$*, deux nombres relativement premiers, le mot de Christoffel* $\mathcal{C}_{p/q} = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$ *de pente* p/q *est défini par :*

$$w_i = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \textit{if} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i *est le reste de la division de* (ik) *par* n*.*

Par exemple, si $n = 8$ et $k = 5$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(ik) \mod n$	0	5	2	7	4	1	6	3	0

Détection des mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $p, q \in \mathbb{N}$, deux nombres relativement premiers, le mot de Christoffel $\mathcal{C}_{p/q} = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$ de pente p/q est défini par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \textit{if} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

Par exemple, si $n = 8$ et $k = 5$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(ik) \mod n$	0	5	2	7	4	1	6	3	0
$w_i =$		0	1	0	1	1	0	1	1

Détection des mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $p, q \in \mathbb{N}$, deux nombres relativement premiers, le mot de Christoffel $\mathcal{C}_{p/q} = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$ de pente p/q est défini par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \textit{if} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

Par exemple, si $n = 8$ et $k = 5$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(ik) \mod n$	0	5	2	7	4	1	6	3	0
$w_i =$		0	1	0	1	1	0	1	1

Ainsi, $\mathcal{C}_{8,5} = 0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1$.

Arbre de Christoffel

$$\begin{array}{rcl} G, D : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \\ G(u, v) & = & (u, uv) \\ D(u, v) & = & (uv, v) \end{array}$$

Arbre de Christoffel

$$\begin{array}{rcl} G, D : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \\ G(u,v) & = & (u, uv) \\ D(u,v) & = & (uv, v) \end{array}$$

Theorème (Borel, Laubie 1993)

Un mot w est Christoffel ssi il existe deux mots u, v et une suite $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \{G, D\}$ tels que :

$$w = (u,v)_{\mathbf{C}} = H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_n(0,1)$$

Arbre de Christoffel

$$\begin{array}{rcl} G, D : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \\ G(u,v) & = & (u, uv) \\ D(u,v) & = & (uv, v) \end{array}$$

Theorème (Borel, Laubie 1993)

Un mot w est Christoffel ssi il existe deux mots u, v et une suite $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \{G, D\}$ tels que :

$$w = (u, v)_{\mathbf{C}} = H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_n(0, 1)$$

Corollaire

Étant un mot de Christoffel non-trivial $u = (x, y)_{\mathbf{C}}$, pour tout mot de Christoffel w qui admet u comme préfixe propre, il existe $k \geq 1$ tel que $u^k y$ est préfixe de w. De plus, $u^k y = (u, u^{k-1} y)_{\mathbf{C}}$.

Duval++

Algorithme

Input: $w \in \mathcal{A}^n$

$i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 2$;

while $j \leq n$ **and** $w_i \leq w_j$ **do**

  if $w_i = w_j$ **then**

    $++i$;

  else

    $i \leftarrow 1$;

  $++j$;

return $\left(w[1 : j - i], \lfloor \frac{j-1}{j-i} \rfloor\right)$;

Algorithme

Input: $w \in \mathcal{A}^n$

$i \leftarrow 1;\ j \leftarrow 2;$

while $j \leq n$ **and** $w_i \leq w_j$ **do**

  if $w_i = w_j$ **then**

    $++i;$

  else if $j \neq q$ **then**

    $w \notin$ **CV**

  else

    $i \leftarrow 1;$

  $++j;$

return $\left(w[1 : j - i], \lfloor \frac{j-1}{j-i} \rfloor\right);$

Algorithme

Input: $w \in \mathcal{A}^n$

$i \leftarrow 1;\ j \leftarrow 2;\ p \leftarrow 1;\ q \leftarrow 2;$

while $j \leq n$ **and** $w_i \leq w_j$ **do**

  if $w_i = w_j$ **then**

    $++i;$

    if $j = q$ **then**

      $q \leftarrow q + p;$

  else if $j \neq q$ **then**

    $w \notin$ **CV**

  else

    $i \leftarrow 1;\ q \leftarrow 2q - p;\ p \leftarrow j;$

  $++j;$

return $\left(w[1 : j - i], \lfloor \frac{j-1}{j-i} \rfloor\right);$

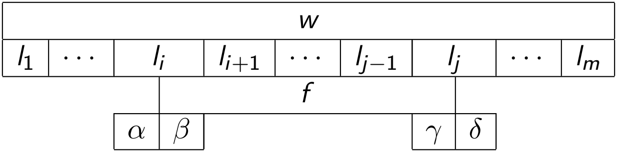
Propriété (Reutenauer, 2008)

Le langage **CV** *est fermé par factorisation.*

Le langage **CV**

Propriété (Reutenauer, 2008)

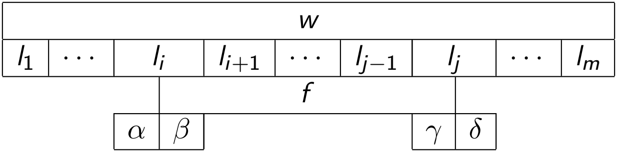
Le langage **CV** *est fermé par factorisation.*



Le langage **CV**

Propriété (Reutenauer, 2008)

Le langage **CV** *est fermé par factorisation.*

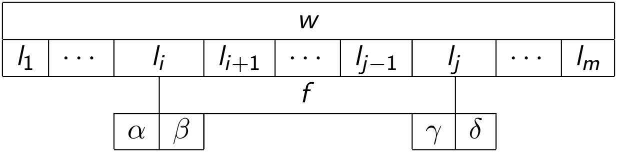


$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_k)_{\textbf{Lyn}} \quad \gamma = (g_1, g_2, \ldots, g_l)_{\textbf{Lyn}}$

Le langage **CV**

Propriété (Reutenauer, 2008)

Le langage **CV** *est fermé par factorisation.*



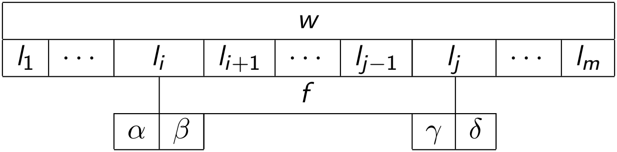
$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_k)_{\mathbf{Lyn}} \quad \gamma = (g_1, g_2, \ldots, g_l)_{\mathbf{Lyn}}$$

$$b_1 \geq \cdots \geq b_k > l_i \geq \cdots \geq l_j > g_1 \geq \cdots \geq g_l.$$

Le langage **CV**

Propriété (Reutenauer, 2008)

Le langage **CV** *est fermé par factorisation.*



$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_k)_{\textbf{Lyn}} \quad \gamma = (g_1, g_2, \ldots, g_l)_{\textbf{Lyn}}$$

$$b_1 \geq \cdots \geq b_k > l_i \geq \cdots \geq l_j > g_1 \geq \cdots \geq g_l.$$

$$f = (b_1, \ldots, b_k, l_{i+1}, \ldots, l_{j-1}, g_1, \ldots, g_l)_{\textbf{Lyn}}.$$

Mots non-convexes

Définition

Soit **NC** *le langage des mots non-convexes sur* $\mathcal{A}$*, c'est-à-dire*

$$\mathbf{NC} = \mathcal{A}^* \setminus \mathbf{CV}.$$

Mots non-convexes

Définition

Soit **NC** *le langage des mots non-convexes sur* $\mathcal{A}$*, c'est-à-dire*

$$\mathbf{NC} = \mathcal{A}^* \setminus \mathbf{CV}.$$

Propriété

Le langage **NC** *forme idéal of* $\mathcal{A}^*$*.*

Non-Convex Minimal

Définition

Soit **NCM** *l'ensemble suivant :*

$$\mathbf{NCM} = \{w \in \mathbf{NC} \,|\, \forall x \in \mathit{Fact}(w), x \neq w \implies x \in \mathbf{CV}\}.$$

Non-Convex Minimal

Définition

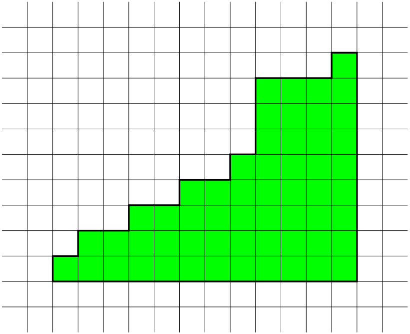
Soit **NCM** *l'ensemble suivant :*

$$\mathbf{NCM} = \{w \in \mathbf{NC} \mid \forall x \in Fact(w), x \neq w \implies x \in \mathbf{CV}\}.$$

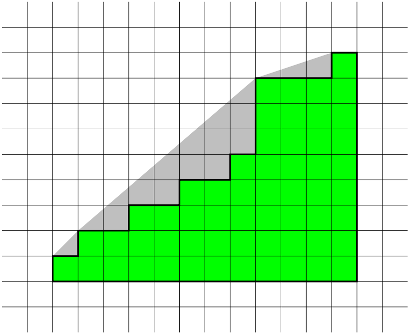
Proposition

Le langage **NC** *est un idéal de* $\mathcal{A}^*$ *généré par* **NCM**.

Exemple

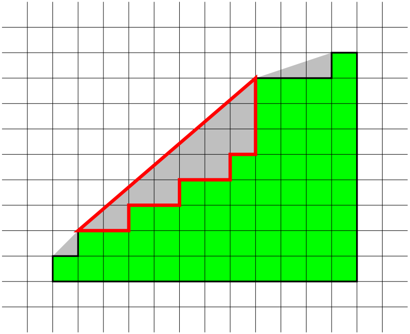


Exemple



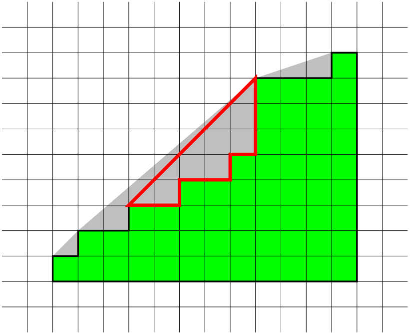
$$101001001001011100010 \in \mathbf{NC}$$

Exemple



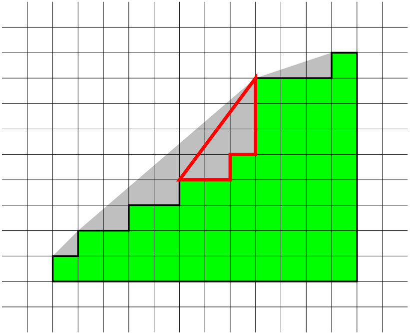
$0010010010111 \in \mathbf{NC}$

Exemple



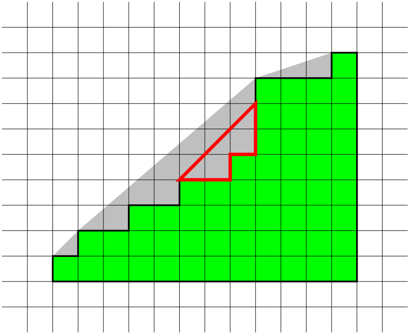
$$0010010111 \in \mathbf{NC}$$

Exemple



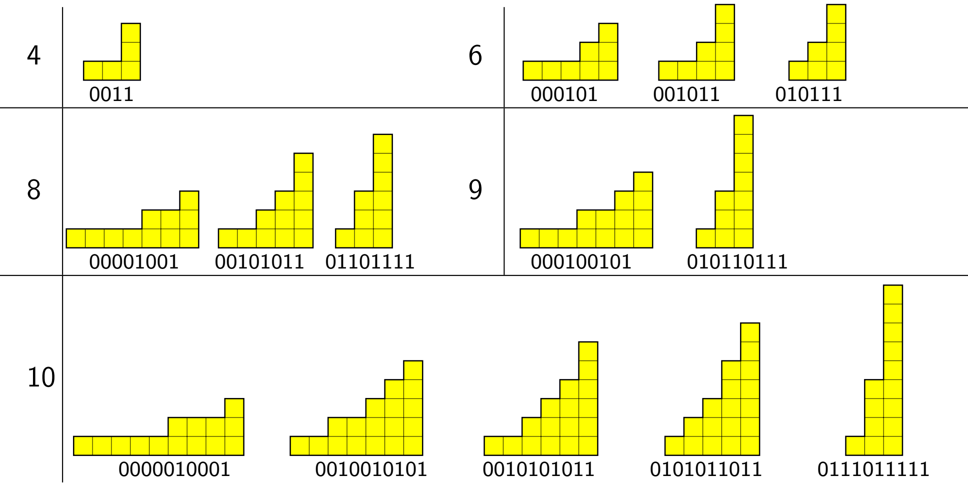
$0010111 \in \mathbf{NC}$

Exemple



$001011 \in \textbf{NCM}$

Les premiers éléments de **NCM**



Main Result

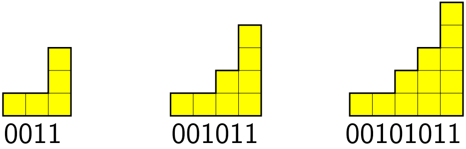
Theorem (P., 2009)

$$\mathbf{NCM} = \left\{ uw^k v \mid w = (u,v)_{\mathbf{C}} \ \mathit{et}\ k \geq 1 \right\}$$

Main Result

Theorem (P., 2009)

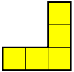
$$\mathbf{NCM} = \left\{ uw^k v \,|\, w = (u,v)_{\mathbf{C}} \text{ et } k \geq 1 \right\}$$



Main Result

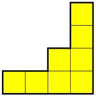
Theorem (P., 2009)

$$\mathbf{NCM} = \left\{ uw^k v \mid w = (u,v)_{\mathbf{C}} \ \mathit{et}\ k \geq 1 \right\}$$



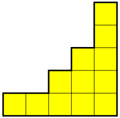
0011

$0 \cdot (01) \cdot 1$



001011

$0 \cdot (01)^2 \cdot 1$



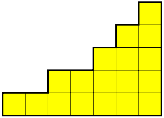
00101011

$0 \cdot (01)^3 \cdot 1$

Main Result

Theorem (P., 2009)

$$\mathbf{NCM} = \left\{ uw^k v \,|\, w = (u, v)_{\mathbf{C}} \ et\ k \geq 1 \right\}$$

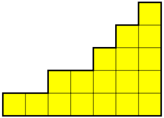


0010010101

Main Result

Theorem (P., 2009)

$$\mathbf{NCM} = \left\{ uw^k v \mid w = (u,v)_{\mathbf{C}} \ et\ k \geq 1 \right\}$$



0010010101

$001 \cdot (00101) \cdot 01$

Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies \qquad u < w < v$

Lemme

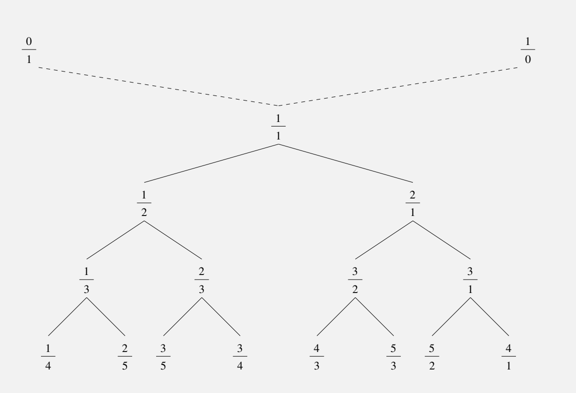
Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v$

Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

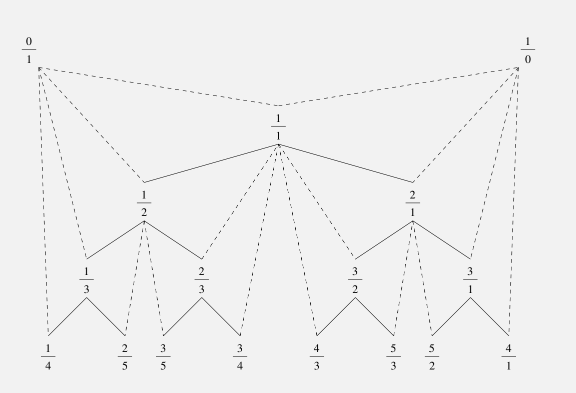
- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v$



Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

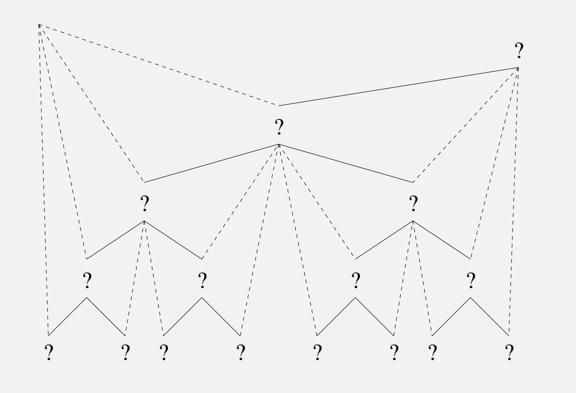
- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v$



Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

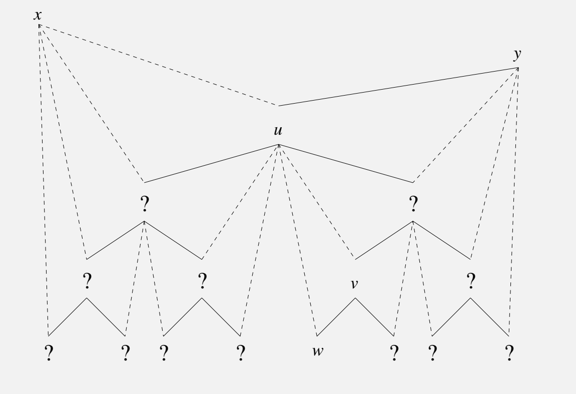
- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v$



Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

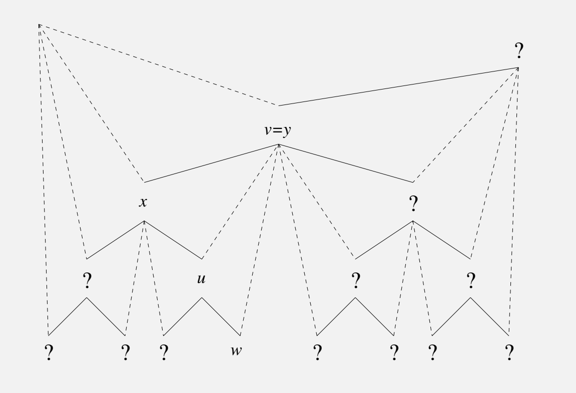
- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v$



Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v$



Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v \leq y.$

Lemme

Let $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$,

- $u = (x, y)_{\mathbf{C}} \implies x < u < w < v \leq y$.
- $v = (x', y')_{\mathbf{C}} \implies x' \leq u < w < v < y'$.

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$0010010100101$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{r} 0010010100101 \\ 00100101 \cdot 00101 \end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{r}
0010010100101 \\
00100101 \cdot 00101 \\
001 \cdot 00101 \cdot 00101
\end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{r}
0010010100101 \\
00100101 \cdot 00101 \\
001 \cdot 00101 \cdot 00101 \\
0 \cdot 01 \cdot 00101 \cdot 00101
\end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{rcl} 0010010100101 & \quad & 0010010100101 \\ 00100101 \cdot 00101 & & \\ 001 \cdot 00101 \cdot 00101 & & \\ 0 \cdot 01 \cdot 00101 \cdot 00101 & & \\ (0, 01, 00101, 00101)_{Left} & & \end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$
\begin{array}{r}
0010010100101 \\
00100101 \;\cdot\; 00101 \\
001 \;\cdot\; 00101 \;\cdot\; 00101 \\
0 \;\cdot\; 01 \;\cdot\; 00101 \;\cdot\; 00101 \\
(0, 01, 00101, 00101)_{Left}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
0010010100101 \\
00100101 \;\cdot\; 00101
\end{array}
$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{rrrr}
 & & & 0010010100101 \\
 & & 00100101 & \cdot\ 00101 \\
 & 001 & \cdot\ 00101 & \cdot\ 00101 \\
0 & \cdot\ 01 & \cdot\ 00101 & \cdot\ 00101 \\
\multicolumn{4}{r}{(0, 01, 00101, 00101)_{Left}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
0010010100101 & & & \\
00100101 & \cdot\ 00101 & & \\
00100101 & \cdot\ 001 & \cdot\ 01 &
\end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{rr}
0010010100101 & 0010010100101 \\
00100101 \cdot 00101 & 00100101 \cdot 00101 \\
001 \cdot 00101 \cdot 00101 & 00100101 \cdot 001 \cdot 01 \\
0 \cdot 01 \cdot 00101 \cdot 00101 & 00100101 \cdot 001 \cdot 0 \cdot 1 \\
(0, 01, 00101, 00101)_{Left} &
\end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{rcl}
0010010100101 & \quad & 0010010100101 \\
00100101 \cdot 00101 & & 00100101 \cdot 00101 \\
001 \cdot 00101 \cdot 00101 & & 00100101 \cdot 001 \cdot 01 \\
0 \cdot 01 \cdot 00101 \cdot 00101 & & 00100101 \cdot 001 \cdot 0 \cdot 1 \\
(0, 01, 00101, 00101)_{Left} & & (00100101, 001, 0, 1)_{Right}
\end{array}$$

Factorisation gauche et droite

Étant donné le mot de Christoffel $C_{5/8} = 0010010100101$.

$$\begin{array}{rcl} 0010010100101 & \quad & 0010010100101 \\ 00100101 \cdot 00101 & & 00100101 \cdot 00101 \\ 001 \cdot 00101 \cdot 00101 & & 00100101 \cdot 001 \cdot 01 \\ 0 \cdot 01 \cdot 00101 \cdot 00101 & & 00100101 \cdot 001 \cdot 0 \cdot 1 \\ (0, 01, 00101, 00101)_{Left} & & (00100101, 001, 0, 1)_{Right} \end{array}$$

Lemme

Étant donné un mot de Christoffel $w = 0x1$ ayant les factorisations suivantes :

$$w = (0, l_1, l_2, \ldots, l_m)_{Left} = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 1)_{Right}$$

alors

$$x1 = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}} \text{ and } 0x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)_{\mathbf{Lyn}}$$

Proof

Let w be a Christoffel word with standard factorization $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$. Let us see that $uw^k v \in \mathbf{NCM}$.

Proof

Let w be a Christoffel word with standard factorization $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$. Let us see that $uw^k v \in \mathbf{NCM}$.

Let $0X1 = uw^k v$, it suffices to see that

(a) $0X1 \notin \mathbf{CV}$,

(b) $0X, X1 \in \mathbf{CV}$.

Proof

Let w be a Christoffel word with standard factorization $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$. Let us see that $uw^k v \in \mathbf{NCM}$.

Let $0X1 = uw^k v$, it suffices to see that

(a) $0X1 \notin \mathbf{CV}$,

(b) $0X, X1 \in \mathbf{CV}$.

$$0X1 = (uw^k) \cdot (v) = (u) \cdot (w^k v)$$

Proof

Let w be a Christoffel word with standard factorization $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$. Let us see that $uw^k v \in \mathbf{NCM}$.

Let $0X1 = uw^k v$, it suffices to see that

(a) $0X1 \notin \mathbf{CV}$,

(b) $0X, X1 \in \mathbf{CV}$.

$$0X1 = (uw^k) \cdot (v) = (u) \cdot (w^k v)$$

$u, v, uw^k, w^k v$ are Christoffel words so

- $0X1$ is a Lyndon word since it is the concatenation of increasing Lyndon words.
- $0X1$ is not a Christoffel word since it admits two factorizations as Christoffel words.

Proof

- $0X \in \mathbf{CV}$:

Proof

- $0X \in \mathbf{CV}$:

  Consider the right factorization of $v = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 1)_{Right}$,

Proof

- $0X \in \mathbf{CV}$:
  Consider the right factorization of $v = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 1)_{Right}$,
  $0X1 = uw^k v = uw^k r_1 r_2 \cdots r_n \cdot 1$.

Proof

- $0X \in \mathbf{CV}$:
  Consider the right factorization of $v = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 1)_{Right}$,
  $0X1 = uw^k v = uw^k r_1 r_2 \cdots r_n \cdot 1.$
  $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $v = (r_1, r_2 \cdots r_n 1)_{\mathbf{C}} \implies u \geq r_1.$

Proof

- $0X \in \mathbf{CV}$:
  Consider the right factorization of $v = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 1)_{Right}$,
  $0X1 = uw^k v = uw^k r_1 r_2 \cdots r_n \cdot 1$.
  $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $v = (r_1, r_2 \cdots r_n 1)_{\mathbf{C}} \implies u \geq r_1$.
  $0X = (uw^k, r_1, r_2, \ldots, r_n)_{\mathbf{Lyn}} \in \mathbf{CV}$.

Proof

- $0X \in \mathbf{CV}$:
  Consider the right factorization of $v = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 1)_{Right}$,
  $0X1 = uw^k v = uw^k r_1 r_2 \cdots r_n \cdot 1$.
  $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $v = (r_1, r_2 \cdots r_n 1)_{\mathbf{C}} \implies u \geq r_1$.
  $0X = (uw^k, r_1, r_2, \ldots, r_n)_{\mathbf{Lyn}} \in \mathbf{CV}$.

- $X1 \in \mathbf{CV}$ is shown in a similar way.

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?

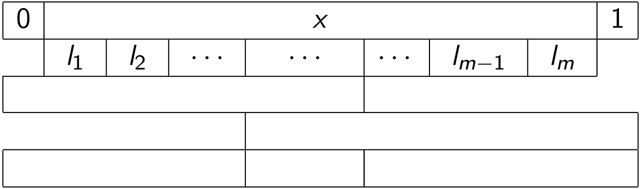
Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.

Proof

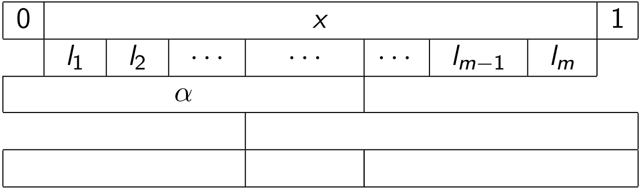
Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?

By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.



Proof

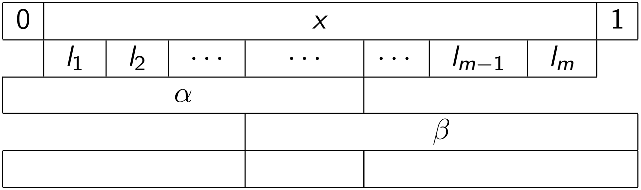
Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.



$$0 < l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \cdots$$

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.



$$\cdots \geq l_{m-1} \geq l_m < 1$$

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.

<table>
<tr><td>0</td><td colspan="7">x</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>l_1</td><td>l_2</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>l_{m-1}</td><td>l_m</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">α</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="5">β</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

$0x \in \mathbf{CV}$ so α is a Christoffel word.
$x1 \in \mathbf{CV}$ so β is a Christoffel word.

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.

<table>
<tr><td>0</td><td colspan="7">x</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>l_1</td><td>l_2</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>l_{m-1}</td><td>l_m</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">α</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="5">β</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

$\alpha = (0, l_1, l_2, \ldots)_{Left}$ so for all l_i that is in α

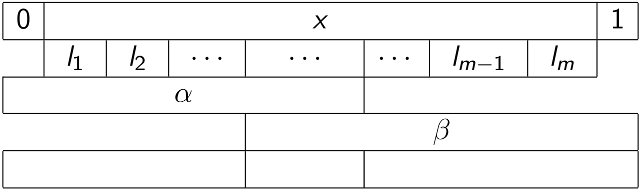
$$\implies 0l_1 \cdots l_i = (0l_1 \cdots l_{i-1}, l_i)_{\mathbf{C}}$$

$$\implies l_{i-1} = l_i \text{ or } |l_{i-1}| < |l_i|.$$

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?

By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.



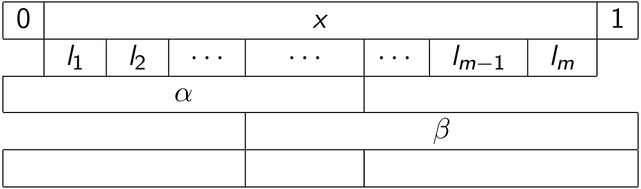
$$\beta = (\ldots, l_{m-1}, l_m, 1)_{Right} \text{ so for all } l_i \text{ that is in } \beta$$

$$\Longrightarrow \; l_i l_{i+1} \cdots l_m 1 = (l_i, l_{i+1} \cdots l_m 1)_{\mathbf{C}}$$

$$\Longrightarrow \; l_i = l_{i+1} \text{ or } |l_i| > |l_{i+1}|$$

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.



if l_i and l_{i+1} are in both α and β

$l_i = l_{i+1}$

let us call them w.

Proof

Let $0x1 \in \mathbf{NCM}$, does there exist $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$ and $k \geq 1$ such that $0x1 = uw^k v$?
By the definition, $x \in \mathbf{CV}$ so $x = (l_1, l_2, \ldots, l_m)_{\mathbf{Lyn}}$ where each l_i is a Christoffel word.

<table>
<tr><td>0</td><td colspan="7">x</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>l_1</td><td>l_2</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>l_{m-1}</td><td>l_m</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">α</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="5">β</td></tr>
<tr><td colspan="4">u</td><td>w^k</td><td colspan="4">v</td></tr>
</table>

where $w = (u, v)_{\mathbf{C}}$

Mots équilibrés

Définition

Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ *est équilibré si pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *et toute paire de facteurs* u, v *de* w,

$$|u| = |v| \implies ||u|_a - |v|_a| \leq 1.$$

Mots équilibrés

Définition

Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est équilibré si pour tout $a \in \mathcal{A}$ et toute paire de facteurs u, v de w,

$$|u| = |v| \implies ||u|_a - |v|_a| \leq 1.$$

Theorème (Dulucq, Gouyou-Beauchamps, 1990)

Les mots équilibrés sur deux lettres sont exactement les facteurs des mots de Christoffel.

Mots équilibrés

Définition

Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est équilibré si pour tout $a \in \mathcal{A}$ et toute paire de facteurs u, v de w,

$$|u| = |v| \implies ||u|_a - |v|_a| \leq 1.$$

Theorème (Dulucq, Gouyou-Beauchamps, 1990)

Les mots équilibrés sur deux lettres sont exactement les facteurs des mots de Christoffel.

Theorème (Berstel, de Luca, 1997)

Les mots de Christoffel sont les mots Lyndon équilibrés sur deux lettres.

Mots presque équilibrés

On définit l'ensemble des *presque équilibré* par :

$$\mathbf{AB} = \{w \in \mathcal{A}^* \mid \exists! \, \{u, v\} \in \mathrm{Fact}(w) \text{ tq } |u| = |v| \text{ et } ||u|_a - |v|_a| \geq 2\}$$

Plus précisément, ont s'intéresse aux mots minimums relativement à l'ordre factoriel,

$$\mathbf{ABM} = \{w \in \mathbf{AB} \mid \forall u \in \mathrm{Fact}(w), u \neq w \implies u \notin \mathbf{AB}\}.$$

Mots presque équilibrés

On définit l'ensemble des *presque équilibré* par :

$$\mathbf{AB} = \{w \in \mathcal{A}^* \mid \exists! \, \{u, v\} \in \mathrm{Fact}(w) \text{ tq } |u| = |v| \text{ et } ||u|_a - |v|_a| \geq 2\}$$

Plus précisément, ont s'intéresse aux mots minimums relativement à l'ordre factoriel,

$$\mathbf{ABM} = \{w \in \mathbf{AB} \mid \forall u \in \mathrm{Fact}(w), u \neq w \implies u \notin \mathbf{AB}\} .$$

Theorème (P. 2009)

$\mathbf{ABM} = \{uwv \mid w = (u, v)_{\mathbf{C}}\}$

Theorème (Coven, Hedlund, 1973)

Soit $w \in \mathcal{A}^*$ *et* $n \geq 2$ *tels que pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *et* $u, v \in Fact(w)$,

$$|u| = |v| < n \implies ||u|_a - |v|_a| \leq 1,$$

mais il existe $u, v \in Fact(w)$ *tels que* $|u| = |v|$ *et* $||u|_a - |v|_a| > 1$, *alors il existe un palindrome* p *tel que* $|p| = n - 2$ *et* $apa, bpb \in Fact(w)$.

Theorème (Coven, Hedlund, 1973)

Soit $w \in \mathcal{A}^*$ et $n \geq 2$ tels que pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $u, v \in Fact(w)$,

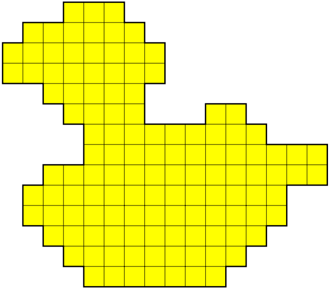
$$|u| = |v| < n \implies ||u|_a - |v|_a| \leq 1,$$

mais il existe $u, v \in Fact(w)$ tels que $|u| = |v|$ et $||u|_a - |v|_a| > 1$, alors il existe un palindrome p tel que $|p| = n - 2$ et $apa, bpb \in Fact(w)$.

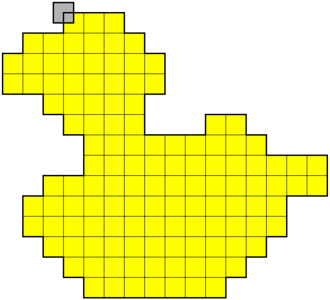
Theorème (de Luca et Mignosi, 1994)

Un mot awb est Christoffel ssi awa, awb, bwa et bwb sont équilibrés.

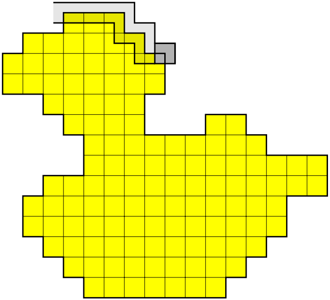
Minimum Length Polygon



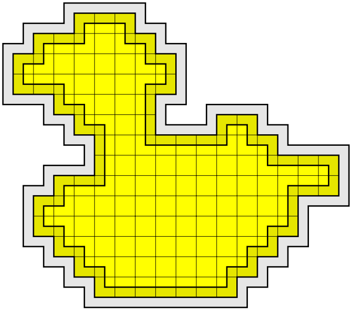
Minimum Length Polygon



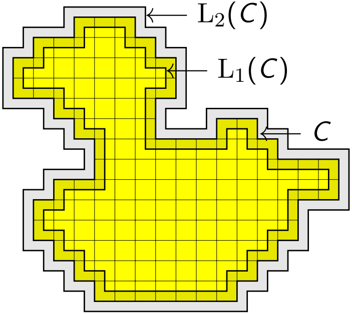
Minimum Length Polygon



Minimum Length Polygon



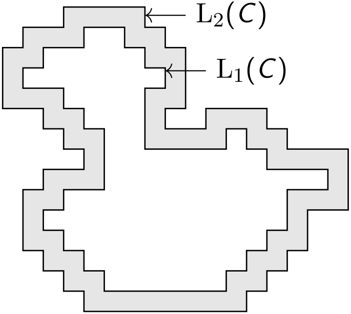
Minimum Length Polygon



Définition

Given a digital contour C, its inner (resp. outer) polygon $\mathrm{L}_1(C)$ (resp. $\mathrm{L}_2(C)$) is the erosion (resp. dilatation) of the body of $I(C)$ by the open unit square centrer on $(0,0)$.

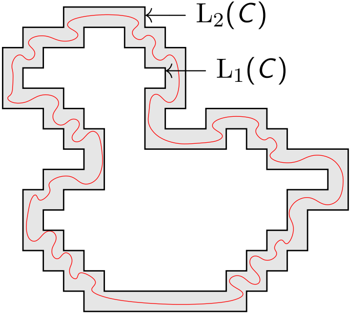
Minimum Length Polygon



Définition

Given a digital contour C, its inner (resp. outer) polygon $\mathrm{L}_1(C)$ (resp. $\mathrm{L}_2(C)$) is the erosion (resp. dilatation) of the body of $I(C)$ by the open unit square centrer on $(0, 0)$.

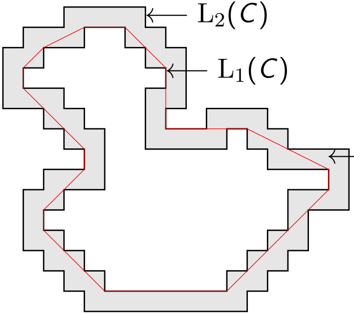
Minimum Length Polygon



Définition

Given a digital contour C, its inner (resp. outer) polygon $\mathrm{L}_1(C)$ (resp. $\mathrm{L}_2(C)$) is the erosion (resp. dilatation) of the body of $I(C)$ by the open unit square centrer on $(0,0)$.

Minimum Length Polygon



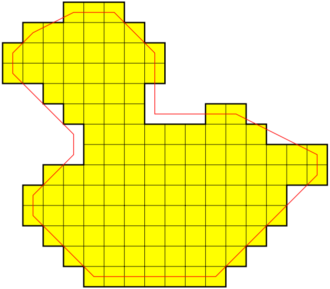
Définition

The minimum length polygon of C is a subset $P \in \mathbb{R}^2$ such that,

$$P = \underset{A \in \mathcal{A},\, L_1(C) \subseteq A,\ \partial A \subset L_2(C) \setminus L_1(C)^\circ}{\arg\min} \mathrm{Per}(A)$$

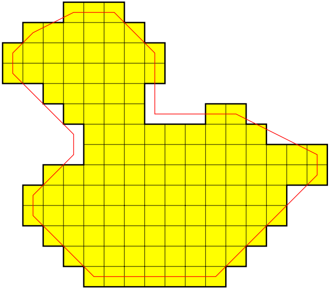
where $\mathcal{A}$ is the family of simply connected compact sets of $\mathbb{R}^2$.

Minimum Length Polygon



The MLP is :

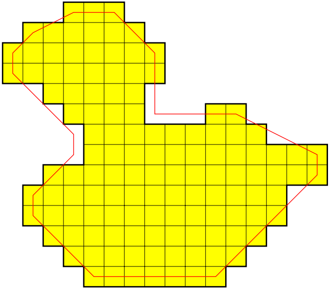
Minimum Length Polygon



The MLP is :

- a good length estimator ;

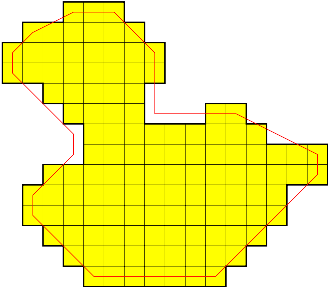
Minimum Length Polygon



The MLP is :

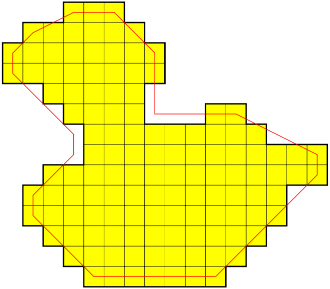
- a good length estimator ;
- a good tangent estimator ;

Minimum Length Polygon



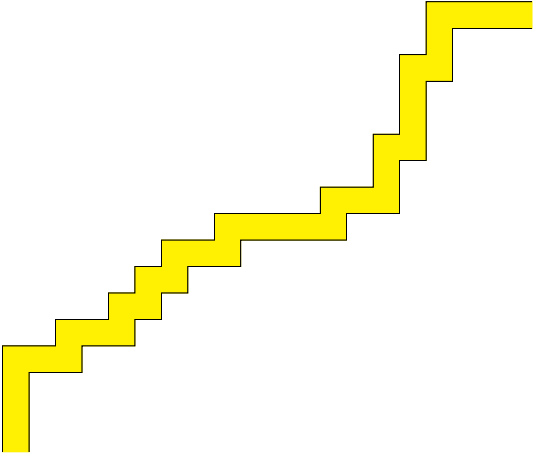
The MLP is :

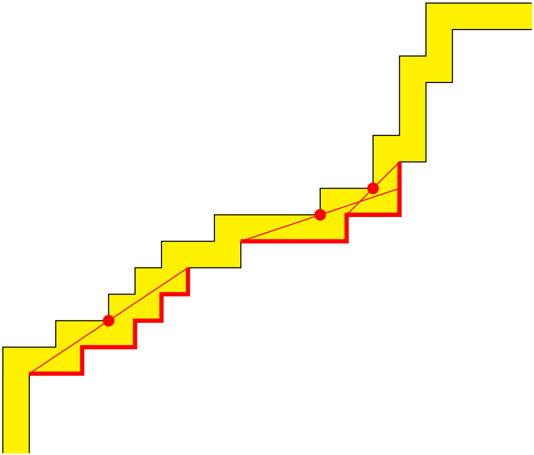
- a good length estimator ;
- a good tangent estimator ;
- characteristic of the shape's convexity ;

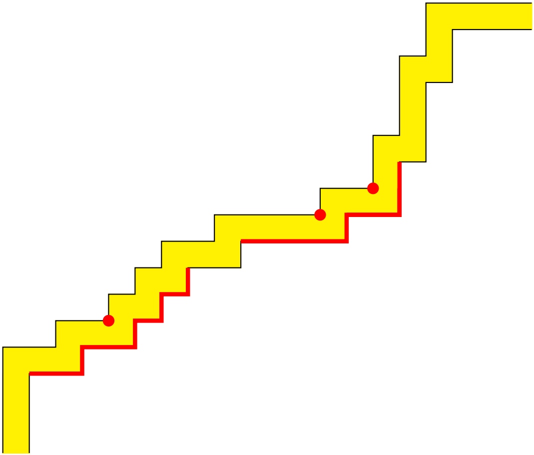


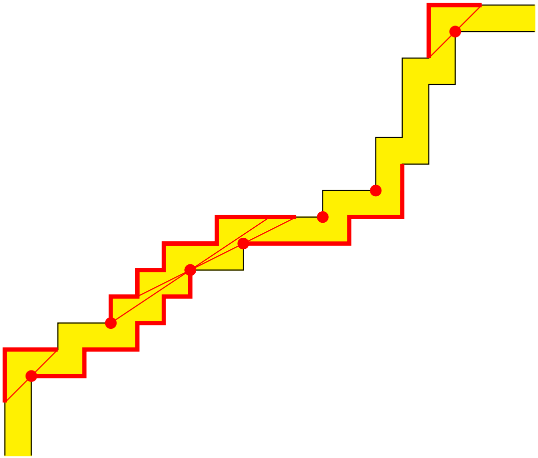
The MLP is :

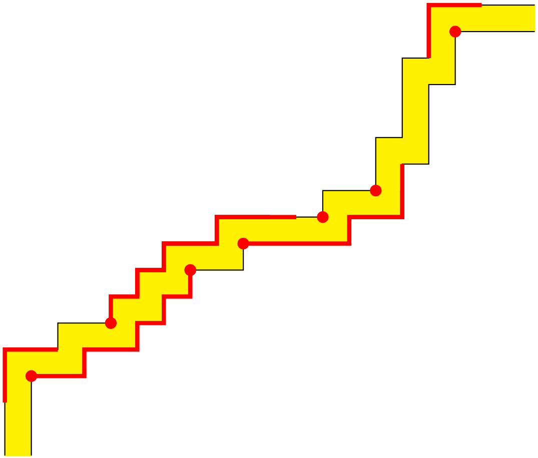
- a good length estimator ;
- a good tangent estimator ;
- characteristic of the shape's convexity ;
- reversible*.

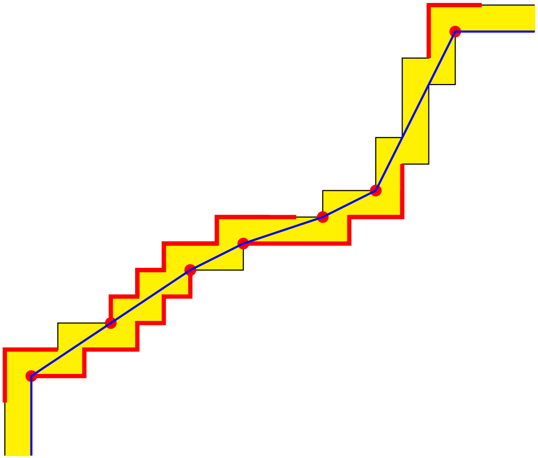












$\mathcal{MERCI}$!