Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages

Thèse de doctorat présentée par

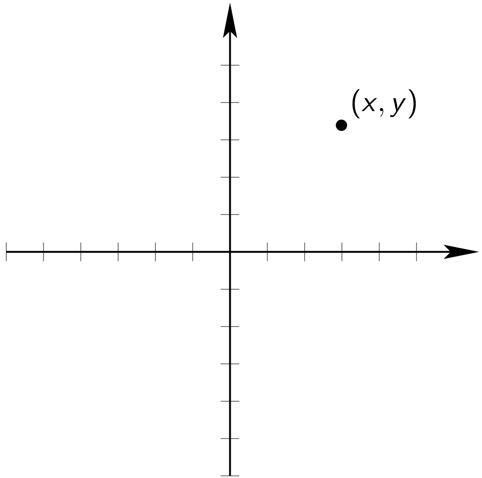
Xavier Provençal

Sous la direction de

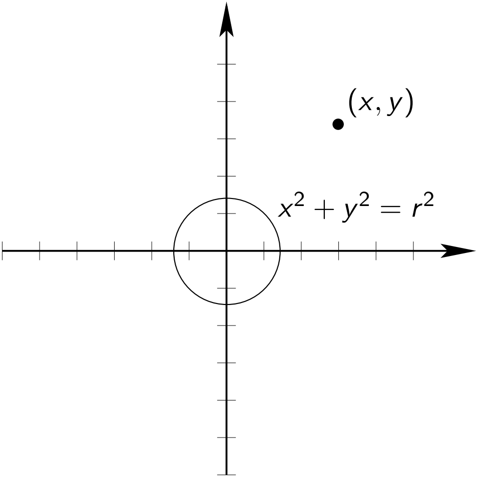
Srečko Brlek

29 août 2008

Plan cartésien



Plan cartésien



Combinatoire des mots

Définition

Étant donné un ensemble de symboles Σ appelé *alphabet*, on définit le mot w comme étant un n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ où $w_i \in \Sigma$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné un ensemble de symboles Σ appelé *alphabet*, on définit le mot w comme étant un n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ où $w_i \in \Sigma$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Notations

- Pour simplifier, on écrit simplement $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné un ensemble de symboles Σ appelé *alphabet*, on définit le mot w comme étant un n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ où $w_i \in \Sigma$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Notations

- Pour simplifier, on écrit simplement $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.
- Σ^n est l'ensemble des mots de longueur n.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné un ensemble de symboles Σ appelé *alphabet*, on définit le mot w comme étant un n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ où $w_i \in \Sigma$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Notations

- Pour simplifier, on écrit simplement $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.
- Σ^n est l'ensemble des mots de longueur n.
- La longueur d'un mot w est notée $|w|$.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné un ensemble de symboles Σ appelé *alphabet*, on définit le mot w comme étant un n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ où $w_i \in \Sigma$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Notations

- Pour simplifier, on écrit simplement $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.
- Σ^n est l'ensemble des mots de longueur n.
- La longueur d'un mot w est notée $|w|$.
- $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné $u \in \Sigma^n$ et $v \in \Sigma^m$, la *concaténation* de u et v, notée uv, est le $(n+m)$-uplet

$$uv = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \Sigma^{n+m}.$$

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné $u \in \Sigma^n$ et $v \in \Sigma^m$, la *concaténation* de u et v, notée uv, est le $(n+m)$-uplet

$$uv = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \Sigma^{n+m}.$$

- On note w^k la concaténation de k copies de w.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné $u \in \Sigma^n$ et $v \in \Sigma^m$, la *concaténation* de u et v, notée uv, est le $(n+m)$-uplet

$$uv = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \Sigma^{n+m}.$$

- On note w^k la concaténation de k copies de w.
- Par définition $w^0 = \varepsilon$ où $|\varepsilon| = 0$.

Combinatoire des mots

Définition

Étant donné $u \in \Sigma^n$ et $v \in \Sigma^m$, la *concaténation* de u et v, notée uv, est le $(n+m)$-uplet

$$uv = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \Sigma^{n+m}.$$

- On note w^k la concaténation de k copies de w.
- Par définition $w^0 = \varepsilon$ où $|\varepsilon| = 0$.
- Un mot w est dit *primitif* si pour tout mot u

$$w = u^k \implies k = 1.$$

Combinatoire des mots

Définition

Soit $w, x, y, z \in \Sigma^*$ quatre mots tels que $w = xyz$,

Combinatoire des mots

Définition

Soit $w, x, y, z \in \Sigma^*$ quatre mots tels que $w = xyz$,

- x est un *préfixe* de w,

Combinatoire des mots

Définition

Soit $w, x, y, z \in \Sigma^*$ quatre mots tels que $w = xyz$,

- x est un *préfixe* de w,
- y est un *facteur* de w,

Combinatoire des mots

Définition

Soit $w, x, y, z \in \Sigma^*$ quatre mots tels que $w = xyz$,

- x est un *préfixe* de w,
- y est un *facteur* de w,
- z est un *suffixe* de w,

Combinatoire des mots

Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

Combinatoire des mots

Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

Exemple :

- Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et le mot $w = abba$

Combinatoire des mots

Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

Exemple :

- Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et le mot $w = a \cdot bba$

$$w \equiv bbaa,$$

Combinatoire des mots

Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

Exemple :

- Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et le mot $w = ab \cdot ba$

$$w \equiv bbaa,$$
$$w \equiv baab,$$

Combinatoire des mots

Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

Exemple :

- Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et le mot $w = abb \cdot a$

$$w \equiv bbaa,$$

$$w \equiv baab,$$

$$w \equiv aabb,$$

Combinatoire des mots

Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

Exemple :

- Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et le mot $w = abba$

$$\begin{aligned} w &\equiv bbaa, \\ w &\equiv baab, \\ w &\equiv aabb, \\ w &\equiv abba. \end{aligned}$$

Combinatoire des mots

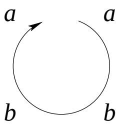
Définition

Deux mots finis u et v sur l'alphabet Σ sont dit *conjugués* s'il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.
On note la conjugaison $u \equiv v$.

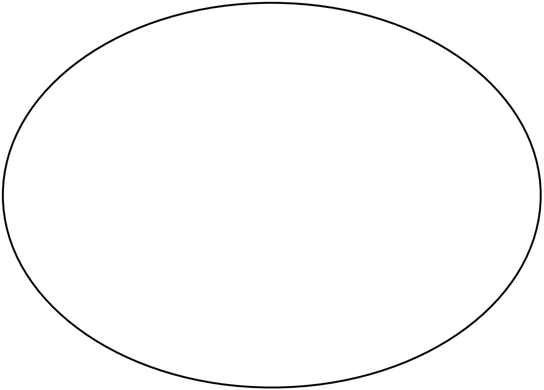
Exemple :

- Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et le mot $w = abba$

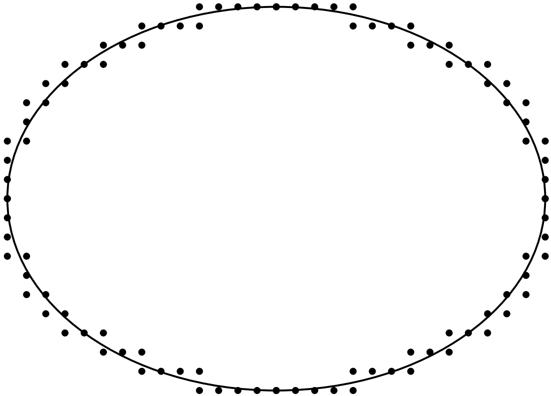
$$\begin{aligned} w &\equiv bbaa, \\ w &\equiv baab, \\ w &\equiv aabb, \\ w &\equiv abba. \end{aligned}$$



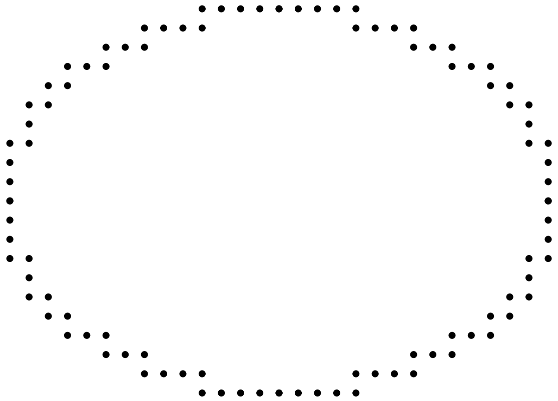
Géométrie discrète



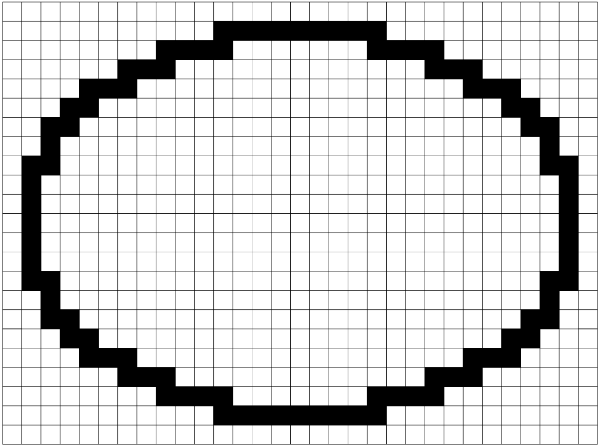
Géométrie discrète



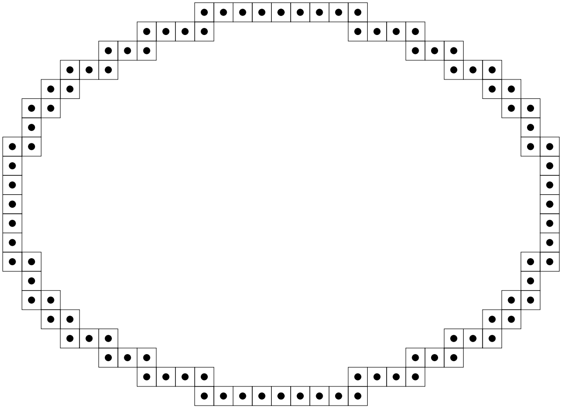
Géométrie discrète



Géométrie discrète



Géométrie discrète



Chemins 4-connexes

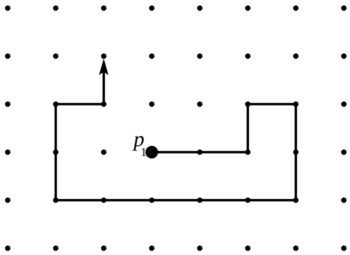
Définition

Un 4-*chemin* est un ensemble ordonné de points du plan discret $\mathcal{C} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ où chaque p_i, $2 \leq i \leq n$, est obtenu de son précédent par une translation de $(0,1), (1,0), (0,-1)$ ou $(-1,0)$.

Chemins 4-connexes

Définition

Un 4-*chemin* est un ensemble ordonné de points du plan discret $\mathcal{C} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ où chaque p_i, $2 \leq i \leq n$, est obtenu de son précédent par une translation de $(0,1), (1,0), (0,-1)$ ou $(-1,0)$.



Géométrie discrète

Définition (Garner, 1958)

Un *polyomino* **P** est un sous-ensemble fini du plan discret $\mathbb{Z}^2$ qui

Géométrie discrète

Définition (Garner, 1958)

Un *polyomino* **P** est un sous-ensemble fini du plan discret $\mathbb{Z}^2$ qui

- ne possède pas de trous,

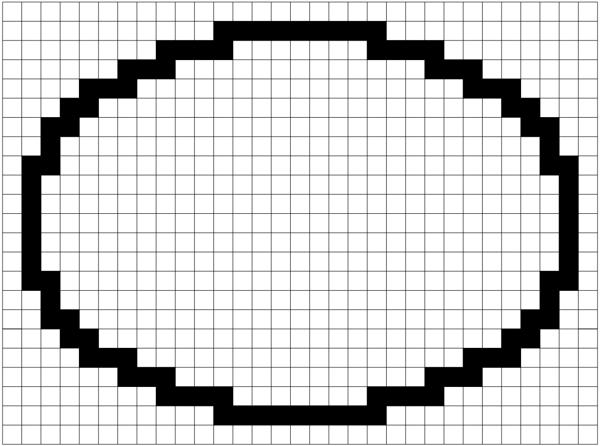
Géométrie discrète

Définition (Garner, 1958)

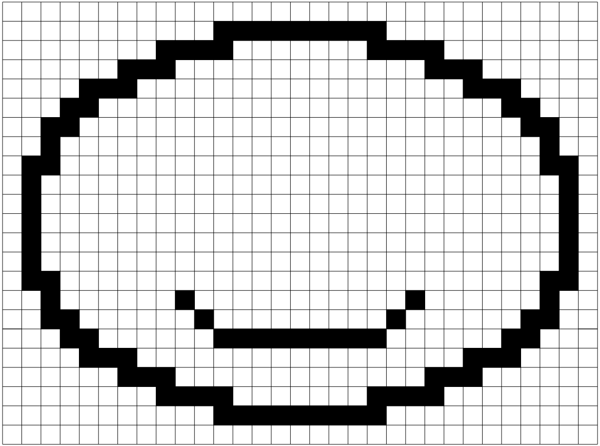
Un *polyomino* **P** est un sous-ensemble fini du plan discret $\mathbb{Z}^2$ qui

- ne possède pas de trous,
- est 4-connexe, c-à-d pour toute paire de points $p, q \in \mathbf{P}$, il existe un 4-chemin reliant p à q entièrement inclus dans **P**.

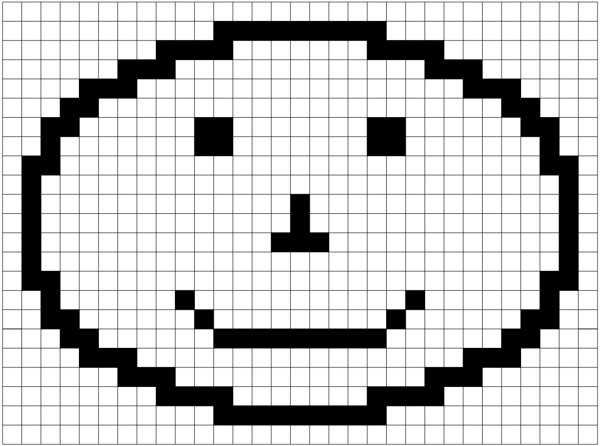
Géométrie discrète



Géométrie discrète



Géométrie discrète



Codage de Freeman

Définition (Freeman, 1961)

Soit $\mathcal{C}$ un 4-chemin dans $\mathbb{Z}^2$, on construit le mot w sur l'alphabet $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ lettre par lettre en parcourant le 4-chemin $\mathcal{C}$ et en notant dans quelle direction est effectué chacun des déplacements unitaires.

Codage de Freeman

Définition (Freeman, 1961)

Soit $\mathcal{C}$ un 4-chemin dans $\mathbb{Z}^2$, on construit le mot w sur l'alphabet $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ lettre par lettre en parcourant le 4-chemin $\mathcal{C}$ et en notant dans quelle direction est effectué chacun des déplacements unitaires.

- Un pas vers la droite $(\longrightarrow)$ est noté 0.

Codage de Freeman

Définition (Freeman, 1961)

Soit $\mathcal{C}$ un 4-chemin dans $\mathbb{Z}^2$, on construit le mot w sur l'alphabet $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ lettre par lettre en parcourant le 4-chemin $\mathcal{C}$ et en notant dans quelle direction est effectué chacun des déplacements unitaires.

- Un pas vers la droite ($\longrightarrow$) est noté 0.
- Un pas vers la gauche ($\longleftarrow$) est noté $\bar{0}$.

Codage de Freeman

Définition (Freeman, 1961)

Soit $\mathcal{C}$ un 4-chemin dans $\mathbb{Z}^2$, on construit le mot w sur l'alphabet $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ lettre par lettre en parcourant le 4-chemin $\mathcal{C}$ et en notant dans quelle direction est effectué chacun des déplacements unitaires.

- Un pas vers la droite ($\longrightarrow$) est noté 0.
- Un pas vers la gauche ($\longleftarrow$) est noté $\bar{0}$.
- Un pas vers le haut ($\uparrow$) est noté 1.

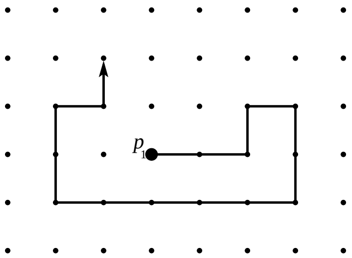
Codage de Freeman

Définition (Freeman, 1961)

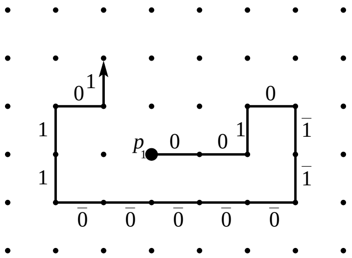
Soit $\mathcal{C}$ un 4-chemin dans $\mathbb{Z}^2$, on construit le mot w sur l'alphabet $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ lettre par lettre en parcourant le 4-chemin $\mathcal{C}$ et en notant dans quelle direction est effectué chacun des déplacements unitaires.

- Un pas vers la droite ($\longrightarrow$) est noté 0.
- Un pas vers la gauche ($\longleftarrow$) est noté $\bar{0}$.
- Un pas vers le haut ($\uparrow$) est noté 1.
- Un pas vers le bas ($\downarrow$) est noté $\bar{1}$.

Codage de Freeman

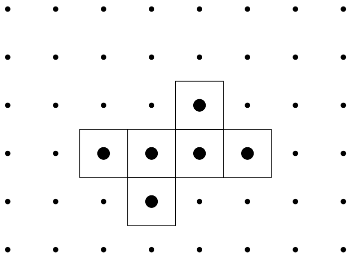


Codage de Freeman

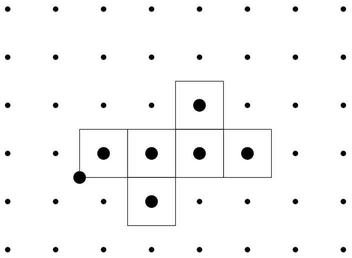


$$w = 0\,0\,1\,0\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,1\,1\,0\,1.$$

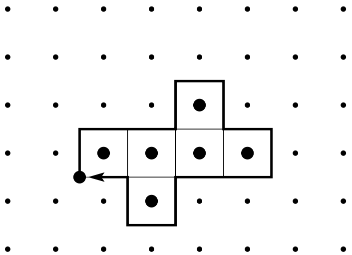
Codage de Freeman



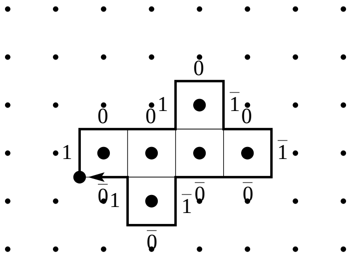
Codage de Freeman



Codage de Freeman

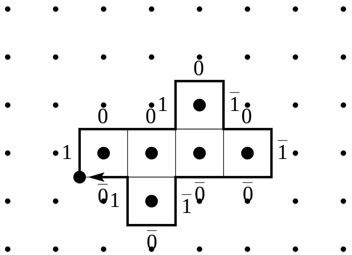


Codage de Freeman



$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,\bar{1}\,0\,\bar{1}\,\bar{0}\,\bar{0}\,\bar{1}\,\bar{0}\,1\,\bar{0} \qquad .$$

Codage de Freeman

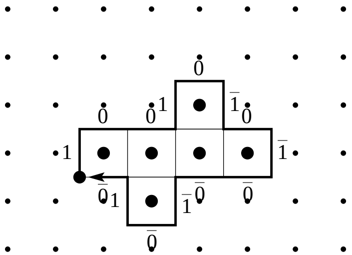


$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,\bar{1}\,0\,\bar{1}\,\bar{0}\,\bar{0}\,\bar{1}\,\bar{0}\,1\,\bar{0} \qquad .$$

Définition

Un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ est dit un *mot de contour* s'il code le bord d'un polyomino.
On note $b(P)$ l'ensemble des mots de contour du polyomino P.

Codage de Freeman



$$w = 1\,0\,0\,1\,0\,\bar{1}\,0\,\bar{1}\,\bar{0}\,\bar{0}\,\bar{1}\,\bar{0}\,1\,\bar{0} \in b(P).$$

Définition

Un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ est dit un *mot de contour* s'il code le bord d'un polyomino.
On note $b(P)$ l'ensemble des mots de contour du polyomino P.

Questions

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$:

Questions

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$:

- Est-ce que w est un mot de contour ?

Questions

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$:

- Est-ce que w est un mot de contour ?

Si oui,

- Est-ce que le polyomino codé par w est digitalement convexe ?

Questions

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$:

- Est-ce que w est un mot de contour ?

Si oui,

- Est-ce que le polyomino codé par w est digitalement convexe ?
- Est-ce que le polyomino codé par w pave le plan par translation ?

Chemins auto-évitants

Chemins auto-évitants

Définition

Un 4-chemin $\mathcal{C} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ est *auto-évitant* si $p_i \neq p_j$ pour tous $i \neq j$.

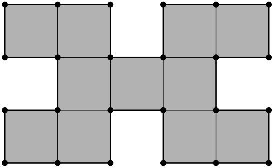
Chemins auto-évitants

Définition

Un 4-chemin $\mathcal{C} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ est *auto-évitant* si $p_i \neq p_j$ pour tous $i \neq j$.

Remarque

Un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ est un mot de contour ssi



Chemins auto-évitants

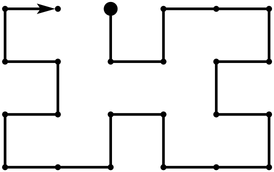
Définition

Un 4-chemin $\mathcal{C} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ est *auto-évitant* si $p_i \neq p_j$ pour tous $i \neq j$.

Remarque

Un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ est un mot de contour ssi

1. Le chemin codé par $w_1 w_2 \cdots w_{n-1}$ est auto-évitant.



Chemins auto-évitants

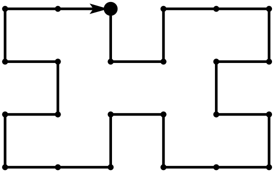
Définition

Un 4-chemin $\mathcal{C} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ est *auto-évitant* si $p_i \neq p_j$ pour tous $i \neq j$.

Remarque

Un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$ est un mot de contour ssi

1. Le chemin codé par $w_1 w_2 \cdots w_{n-1}$ est auto-évitant.
2. Le chemin codé par w termine au point où il a commencé.



Structure de données

On définit le graphe $\mathcal{G} = (N, R, V)$ où

Structure de données

On définit le graphe $\mathcal{G} = (N, R, V)$ où

- N est un ensemble de noeuds associés aux points du plan (par convention, on appelle (x, y) le noeud représentant le point de coordonnées (x, y)).

Structure de données

On définit le graphe $\mathcal{G} = (N, R, V)$ où

- N est un ensemble de noeuds associés aux points du plan (par convention, on appelle (x, y) le noeud représentant le point de coordonnées (x, y)).
- Chaque noeud de N est marqué comme étant soit *visité*, soit *non-visité*.

Structure de données

On définit le graphe $\mathcal{G} = (N, R, V)$ où

- N est un ensemble de noeuds associés aux points du plan (par convention, on appelle (x, y) le noeud représentant le point de coordonnées (x, y)).
- Chaque noeud de N est marqué comme étant soit *visité*, soit *non-visité*.
- R et V sont deux ensembles distincts d'arêtes.

Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.

Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.

Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

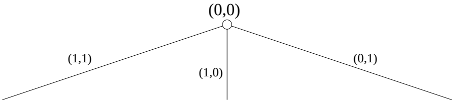
Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

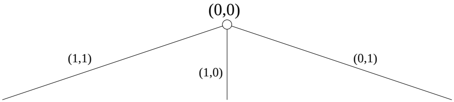
$$(5, 1) = (101_2, 001_2)$$



Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

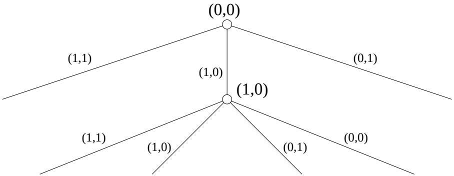
$$(5,1) = (\textcolor{red}{1}01_2, \textcolor{red}{0}01_2)$$



Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

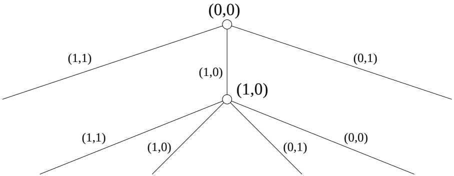
$$(5, 1) = (\textcolor{red}{1}01_2, \textcolor{red}{0}01_2)$$



Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

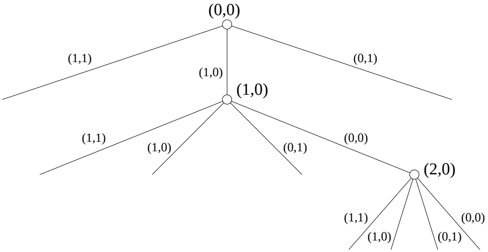
$$(5, 1) = (1\textcolor{red}{0}1_2, 0\textcolor{red}{0}1_2)$$



Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

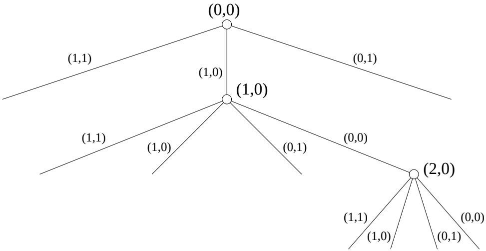
$$(5, 1) = (1{\color{red}0}1_2, 0{\color{red}0}1_2)$$



Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

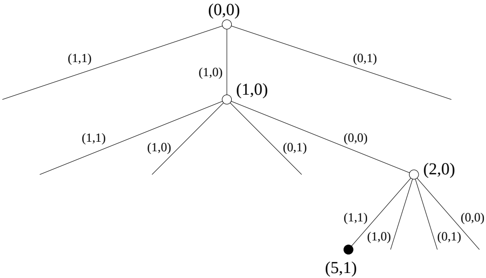
$$(5, 1) = (101_2, 001_2)$$



Le sous-graphe (N, R) forme un quadtree tel que :

- La racine est le noeud $(0, 0)$.
- Chaque noeud (à l'exception de la racine) peut avoir jusqu'à quatre fils.
- Les arêtes menant aux enfants d'un noeud sont étiquetées par des paires dans l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
- (N, R) possède une structure de radix-tree.

$$(5, 1) = (101_2, 001_2)$$



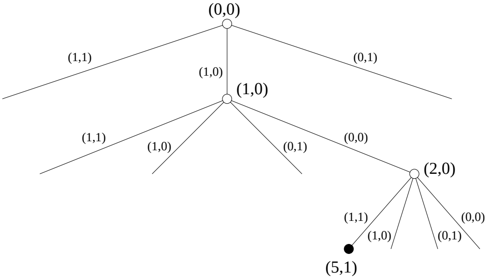
Liens de voisinage

Les arêtes de V relient un noeud (x, y) à ses quatre voisins, soit ses translatés de $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

Liens de voisinage

Les arêtes de V relient un noeud (x, y) à ses quatre voisins, soit ses translatés de $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

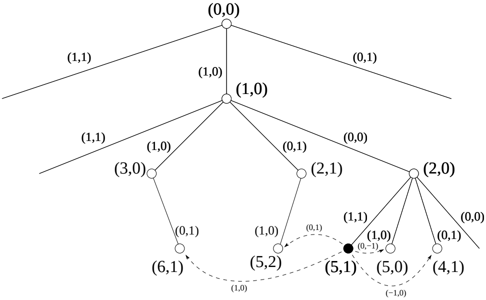
$$(5, 1) = (101_2, 001_2)$$



Liens de voisinage

Les arêtes de V relient un noeud (x, y) à ses quatre voisins, soit ses translatés de $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

$$(5, 1) = (101_2, 001_2)$$
$$(6, 1) = (110_2, 001_2)$$
$$(5, 2) = (101_2, 010_2)$$
$$(4, 1) = (100_2, 001_2)$$
$$(5, 0) = (101_2, 000_2)$$

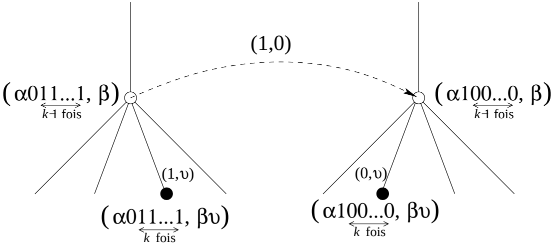


Algorithme

Pour effectuer la translation $(1,0)$ à partir de (x,y), dont l'écriture binaire est $(\alpha 0 \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}, \beta\nu)$, il suffit :

Algorithme

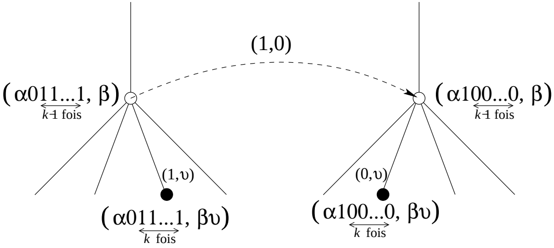
Pour effectuer la translation $(1,0)$ à partir de (x,y), dont l'écriture binaire est $(\alpha 0 \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}, \beta\nu)$, il suffit :



Algorithme

Pour effectuer la translation $(1,0)$ à partir de (x,y), dont l'écriture binaire est $(\alpha 0 \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}, \beta\nu)$, il suffit :

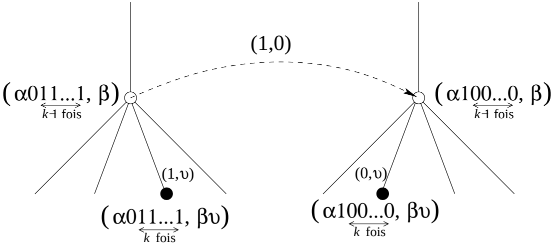
1. Remonter au père de (x,y).



Algorithme

Pour effectuer la translation $(1,0)$ à partir de (x,y), dont l'écriture binaire est $(\alpha 0 \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}, \beta\nu)$, il suffit :

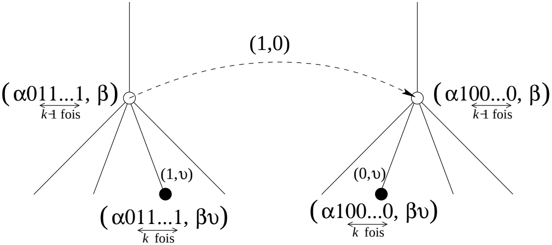
1. Remonter au père de (x,y).
2. Suivre son lien de voisinage $(1,0)$.



Algorithme

Pour effectuer la translation $(1,0)$ à partir de (x,y), dont l'écriture binaire est $(\alpha 0\underbrace{11\ldots 1}_{k \text{ fois}}, \beta\nu)$, il suffit :

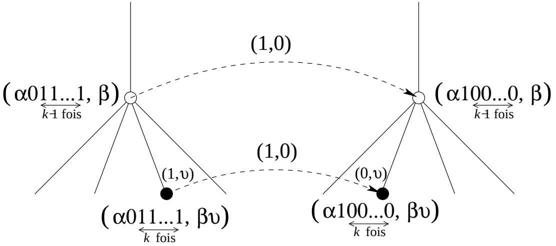
1. Remonter au père de (x,y).
2. Suivre son lien de voisinage $(1,0)$.
3. Descendre à son fils en suivant l'arête d'étiquette $(0,\nu)$.



Algorithme

Pour effectuer la translation $(1,0)$ à partir de (x,y), dont l'écriture binaire est $(\alpha 0 \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}, \beta\nu)$, il suffit :

1. Remonter au père de (x,y).
2. Suivre son lien de voisinage $(1,0)$.
3. Descendre à son fils en suivant l'arête d'étiquette $(0,\nu)$.



Résultats principaux

Théorème

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$, *déterminer si le chemin codé par* w *est auto-évitant est décidable en* $\mathcal{O}(n)$.

Résultats principaux

Théorème

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$, déterminer si le chemin codé par w est auto-évitant est décidable en $\mathcal{O}(n)$.

Idée de la preuve.

1. Montrer que le nombre de noeuds créés est dans $\mathcal{O}(n)$.

Résultats principaux

Théorème

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$, déterminer si le chemin codé par w est auto-évitant est décidable en $\mathcal{O}(n)$.

Idée de la preuve.

1. Montrer que le nombre de noeuds créés est dans $\mathcal{O}(n)$.
2. Borner par une constante le nombre de fois qu'un noeud peut être consulté lors des appels récursifs.

Résultats principaux

Théorème

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$, déterminer si le chemin codé par w est auto-évitant est décidable en $\mathcal{O}(n)$.

Idée de la preuve.

1. Montrer que le nombre de noeuds créés est dans $\mathcal{O}(n)$.
2. Borner par une constante le nombre de fois qu'un noeud peut être consulté lors des appels récursifs.

Corollaire

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^n$, déterminer si w est un mot de contour est décidable en $\mathcal{O}(n)$.

Convexité discrète

Convexité discrète

Définition (Kim)

Un polyomino P est *digitalement convexe* s'il est égal à la discrétisation de son enveloppe convexe Euclidienne.

Convexité discrète

Définition (Kim)

Un polyomino P est *digitalement convexe* s'il est égal à la discrétisation de son enveloppe convexe Euclidienne.

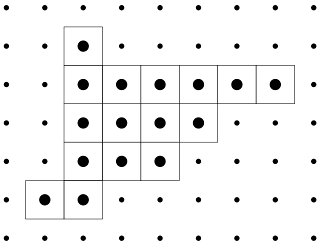
$$\mathrm{Conv}(P) \cap \mathbb{Z}^2 = P$$

Convexité discrète

Définition (Kim)

Un polyomino P est *digitalement convexe* s'il est égal à la discrétisation de son enveloppe convexe Euclidienne.

$$\mathrm{Conv}(P) \cap \mathbb{Z}^2 = P$$

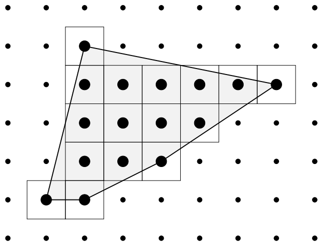


Convexité discrète

Définition (Kim)

Un polyomino P est *digitalement convexe* s'il est égal à la discrétisation de son enveloppe convexe Euclidienne.

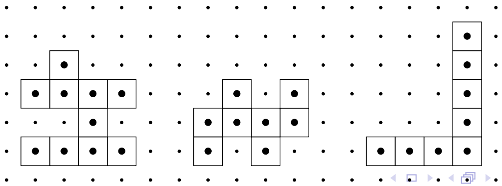
$$\mathrm{Conv}(P) \cap \mathbb{Z}^2 = P$$



HV-convextité

Définition

Un polyomino P est H-convexe si toutes ses lignes sont connexes.



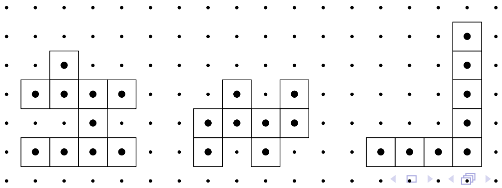
HV-convextité

Définition

Un polyomino P est H-convexe si toutes ses lignes sont connexes.

Définition

Un polyomino P est V-convexe si toutes ses colonnes sont connexes.



HV-convextité

Définition

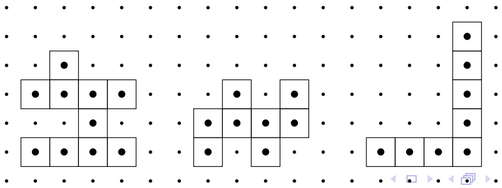
Un polyomino P est H-convexe si toutes ses lignes sont connexes.

Définition

Un polyomino P est V-convexe si toutes ses colonnes sont connexes.

Définition

Un polyomino P est HV-convexe s'il est H-convexe et V-convexe.



Question

Question

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ codant le bord du polyomino *HV*-convexe *P*.

Question

Question

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ codant le bord du polyomino HV-convexe P.

Est-ce que P est digitalement convexe ?

Ordre lexicographique

Définition

Étant donné $<$ un ordre total sur les lettres de Σ, on étend cette relation d'ordre à Σ^* par

$$w < w' \text{ si } \begin{array}{ll} \text{(i)} & w' \in w\Sigma^+, \\ \text{(ii)} & w = uav \text{ et } w' = ubv' \\ & \text{ avec } a, b \in \Sigma, u, v, v' \in \Sigma^* \text{ et } a < b. \end{array}$$

Ordre lexicographique

Définition

Étant donné $<$ un ordre total sur les lettres de Σ, on étend cette relation d'ordre à Σ^* par

$$w < w' \text{ si } \begin{array}{ll} \text{(i)} & w' \in w\Sigma^+, \\ \text{(ii)} & w = uav \text{ et } w' = ubv' \\ & \text{ avec } a, b \in \Sigma, u, v, v' \in \Sigma^* \text{ et } a < b. \end{array}$$

Par exemple, si

$$w = 0001110001 \text{ et } w' = 0011110000110,$$

Ordre lexicographique

Définition

Étant donné $<$ un ordre total sur les lettres de Σ, on étend cette relation d'ordre à Σ^* par

$$w < w' \text{ si } \begin{array}{ll} \text{(i)} & w' \in w\Sigma^+, \\ \text{(ii)} & w = uav \text{ et } w' = ubv' \\ & \text{ avec } a, b \in \Sigma, u, v, v' \in \Sigma^* \text{ et } a < b. \end{array}$$

Par exemple, si

$$w = 0001110001 \text{ et } w' = 0011110000110,$$

alors $w < w'$ (avec l'ordre $0 < 1$).

Mots de Lyndon

Définition

Un mot w est un mot de Lyndon si pour tout $u, v \in \Sigma^+$ on a

$$w = uv \implies w < vu.$$

Mots de Lyndon

Définition

Un mot w est un mot de Lyndon si pour tout $u, v \in \Sigma^+$ on a

$$w = uv \implies w < vu.$$

Par exemple, parmi les mots suivants

$$w_1 = 00100101, w_2 = 0010 \text{ et } w_3 = 0000,$$

Mots de Lyndon

Définition

Un mot w est un mot de Lyndon si pour tout $u, v \in \Sigma^+$ on a

$$w = uv \implies w < vu.$$

Par exemple, parmi les mots suivants

$$w_1 = 00100101, w_2 = 0010 \text{ et } w_3 = 0000,$$

seul w_1 est un mot de Lyndon.

Mots de Lyndon

Théorème (Lyndon, 1958)

Tout mot w sur un alphabet ordonné Σ admet une unique factorisation

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ et $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$ sont des mots de Lyndon.

Mots de Lyndon

Théorème (Lyndon, 1958)

Tout mot w sur un alphabet ordonné Σ admet une unique factorisation

$$w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ et $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$ sont des mots de Lyndon.

Théorème (Fredricksen et Miorana 1978, Duval 1980)

La factorisation de Lyndon d'un mot w de longueur n se calcul en $\mathcal{O}(n)$.

Mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, deux entiers relativement premiers, le *mot de Christoffel primitif* $\mathcal{C}_{n,k} = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$ est définit par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \text{si} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

Mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, deux entiers relativement premiers, le *mot de Christoffel primitif* $\mathcal{C}_{n,k} = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$ est définit par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \text{si} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

Par exemple, si $n = 8$ et $k = 5$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(ik) \mod n$	0	5	2	7	4	1	6	3	0

Mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, deux entiers relativement premiers, le *mot de Christoffel primitif* $\mathcal{C}_{n,k} = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$ est définit par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \text{si} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

Par exemple, si $n = 8$ et $k = 5$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(ik) \mod n$	0	5	2	7	4	1	6	3	0
$w_i =$		0	1	0	1	1	0	1	1

Mots de Christoffel

Définition (Christoffel 1875)

Étant donné $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, deux entiers relativement premiers, le *mot de Christoffel primitif* $\mathcal{C}_{n,k} = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$ est définit par :

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r_{i-1} < r_i, \\ 1 & \text{si} \quad r_{i-1} > r_i, \end{cases}$$

où r_i est le reste de la division de (ik) par n.

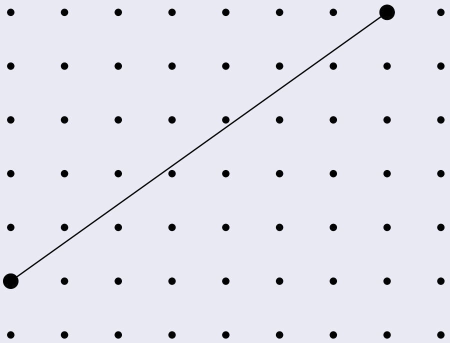
Par exemple, si $n = 8$ et $k = 5$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(ik) \mod n$	0	5	2	7	4	1	6	3	0
$w_i =$		0	1	0	1	1	0	1	1

Ainsi, $\mathcal{C}_{8,5} = 01011011$.

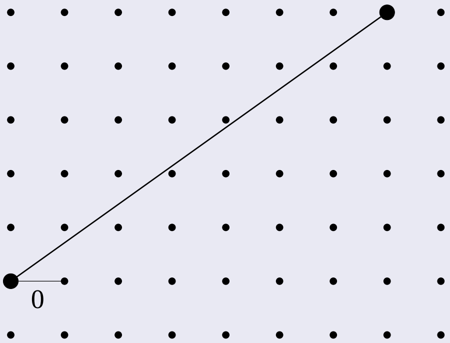
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



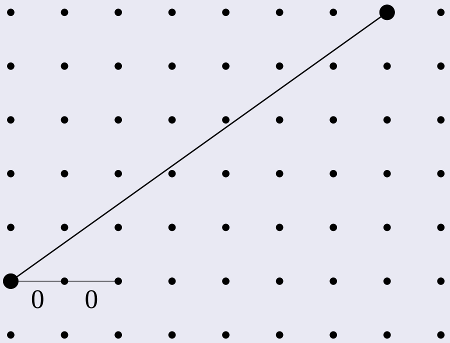
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



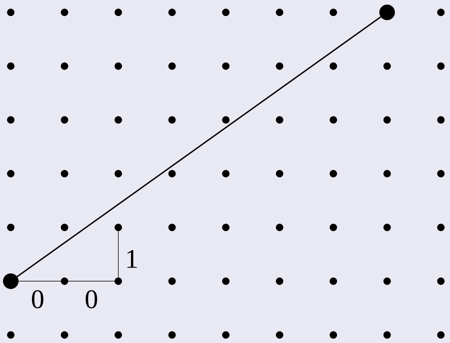
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



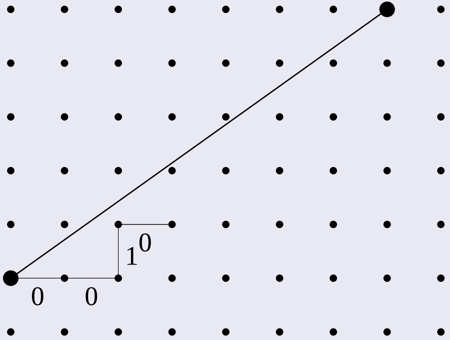
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



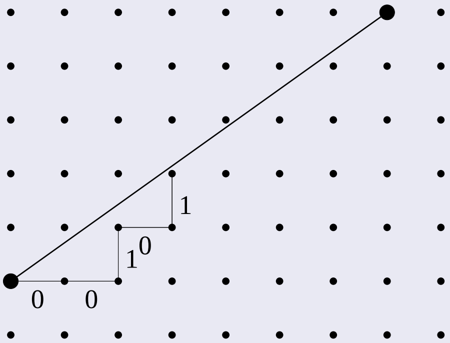
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



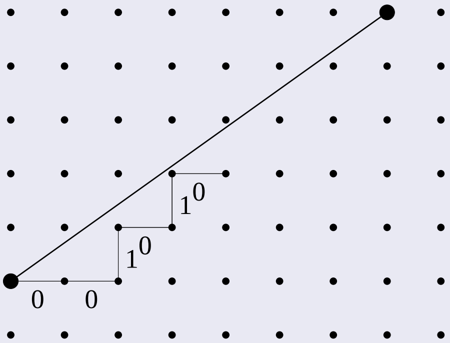
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



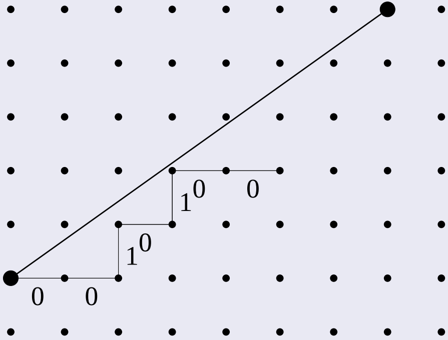
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



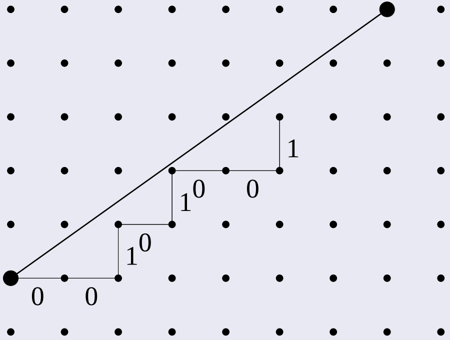
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



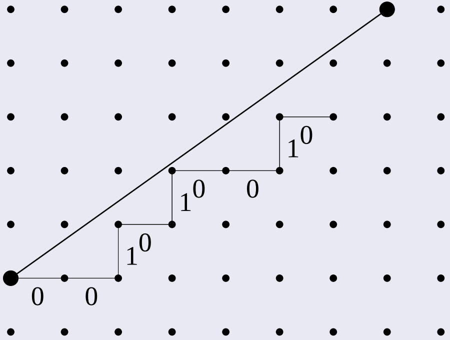
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



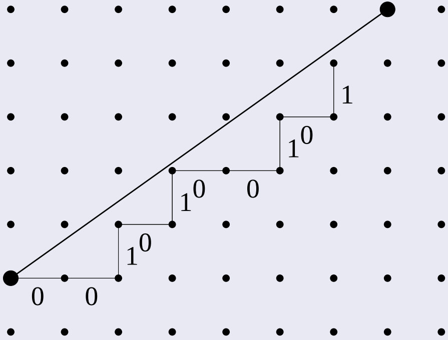
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



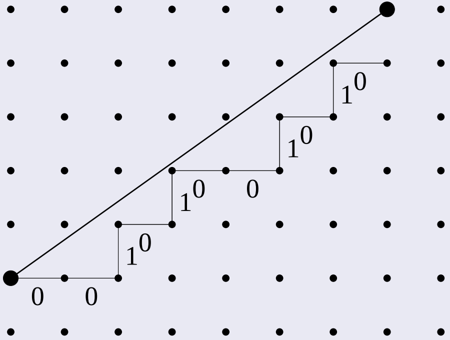
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



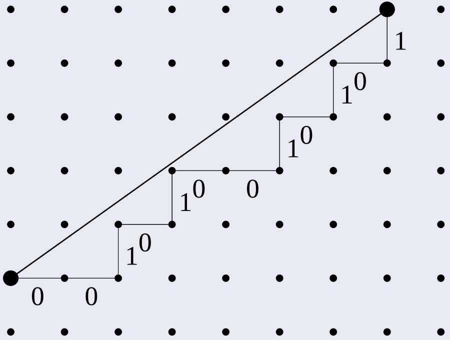
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



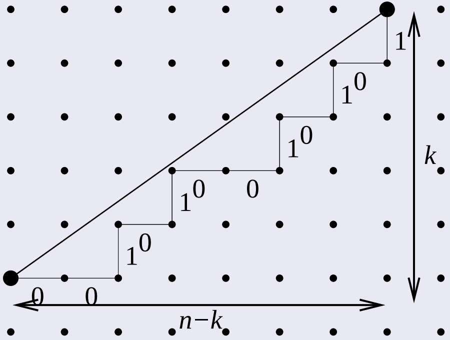
Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



Interprétation géométrique

Définition (Borel et Laubie, 1993)



$$\mathcal{C}_{12,5} = 001010010101.$$

Résultat principal

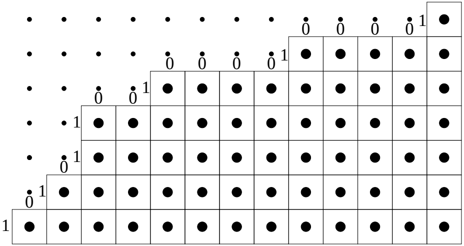
Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.

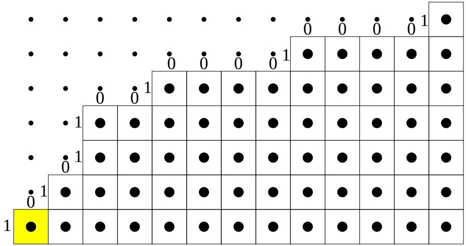


$$w = 1010110010000100001.$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.



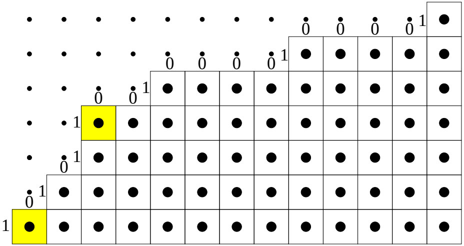
$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$

$$= (1)\ \cdot$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.



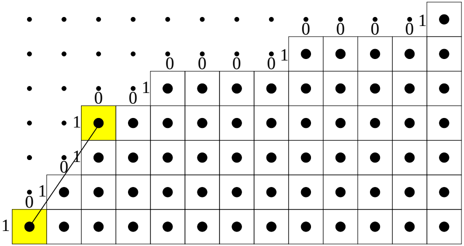
$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$

$$= (1) \cdot (0\,1\,0\,1\,1) \cdot$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.

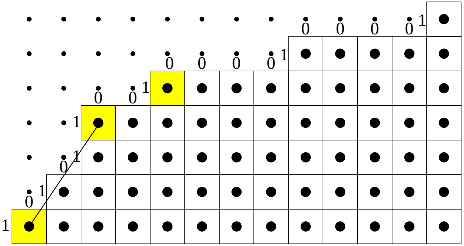


$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$
$$= (1) \cdot (0\,1\,0\,1\,1) \cdot$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.



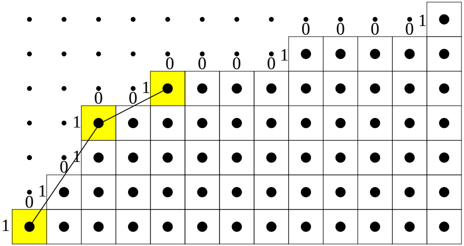
$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$

$$= (1)\cdot(0\,1\,0\,1\,1)\cdot(0\,0\,1)\cdot$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.



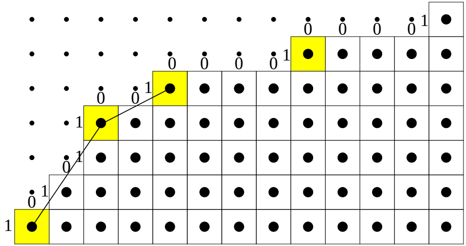
$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$

$$= (1) \cdot (0\,1\,0\,1\,1) \cdot (0\,0\,1) \cdot$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.



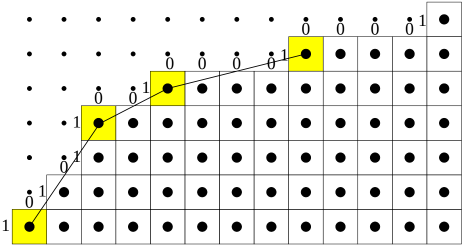
$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$

$$= (1) \cdot (0\,1\,0\,1\,1) \cdot (0\,0\,1) \cdot (0\,0\,0\,0\,1)^2.$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.

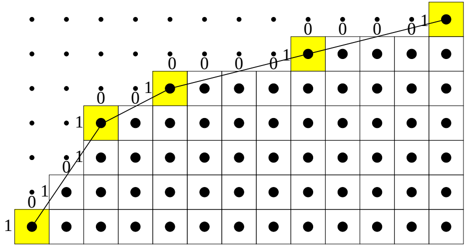


$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$
$$= (1) \cdot (0\,1\,0\,1\,1) \cdot (0\,0\,1) \cdot (0\,0\,0\,0\,1)^2.$$

Résultat principal

Théorème

Un mot w est NO-convexe ssi sa factorisation de Lyndon $w = l_1^{n_1} l_2^{n_2} \cdots l_k^{n_k}$ est composée uniquement de mots de Christoffel.



$$w = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1.$$
$$= (1) \cdot (0\,1\,0\,1\,1) \cdot (0\,0\,1) \cdot (0\,0\,0\,0\,1)^2.$$

Pavages

Pavages

Notation

Étant donné un polyomino P et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$, on note $P_{\overrightarrow{u}}$ la translation de P par $\overrightarrow{u}$.

Pavages

Notation

Étant donné un polyomino P et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$, on note $P_{\overrightarrow{u}}$ la translation de P par $\overrightarrow{u}$.

Définition

Un *pavage* du plan discret $\mathbb{Z}^2$ par un polyomino P est un ensemble de vecteurs $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}^2$ tel que

Pavages

Notation

Étant donné un polyomino P et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$, on note $P_{\overrightarrow{u}}$ la translation de P par $\overrightarrow{u}$.

Définition

Un *pavage* du plan discret $\mathbb{Z}^2$ par un polyomino P est un ensemble de vecteurs $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}^2$ tel que

- $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{\overrightarrow{u} \in \mathcal{T}} P_{\overrightarrow{u}}$.

Pavages

Notation

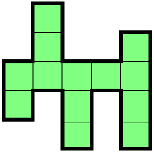
Étant donné un polyomino P et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}^2$, on note $P_{\overrightarrow{u}}$ la translation de P par $\overrightarrow{u}$.

Définition

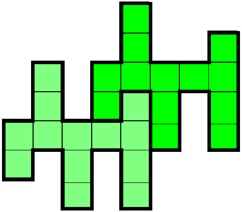
Un *pavage* du plan discret $\mathbb{Z}^2$ par un polyomino P est un ensemble de vecteurs $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}^2$ tel que

- $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{\overrightarrow{u} \in \mathcal{T}} P_{\overrightarrow{u}}$.
- Pour toute paire disctincte $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{T}$, $P_{\overrightarrow{u}} \cap P_{\overrightarrow{v}} = \emptyset$.

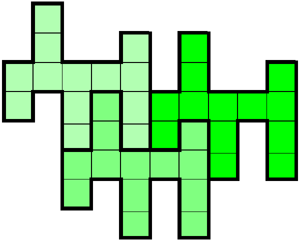
Exemple



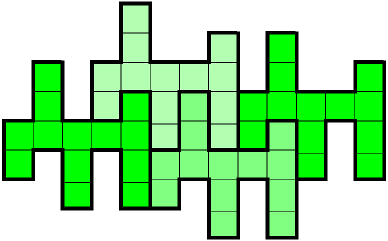
Exemple



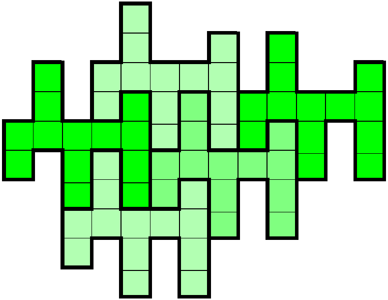
Exemple



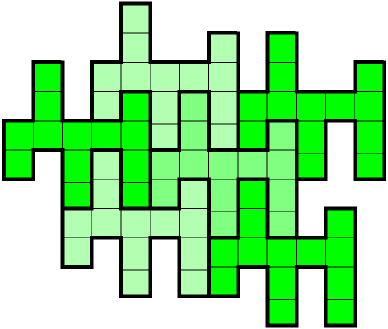
Exemple



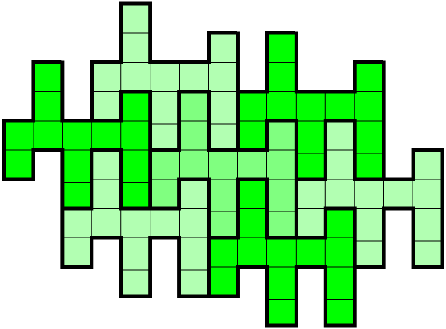
Exemple



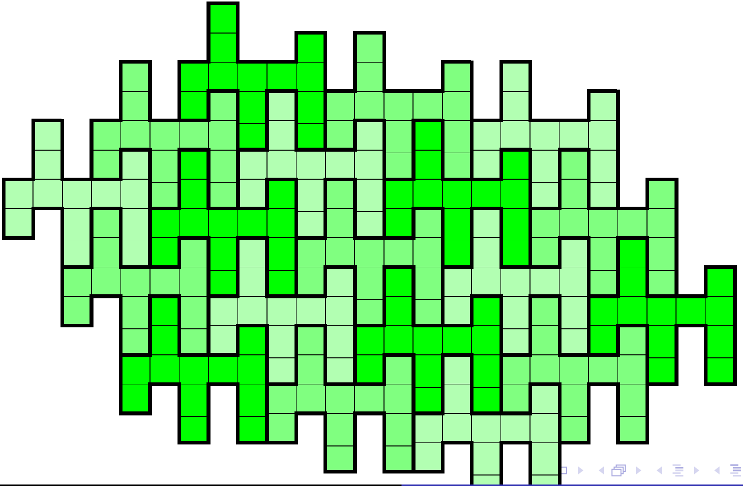
Exemple

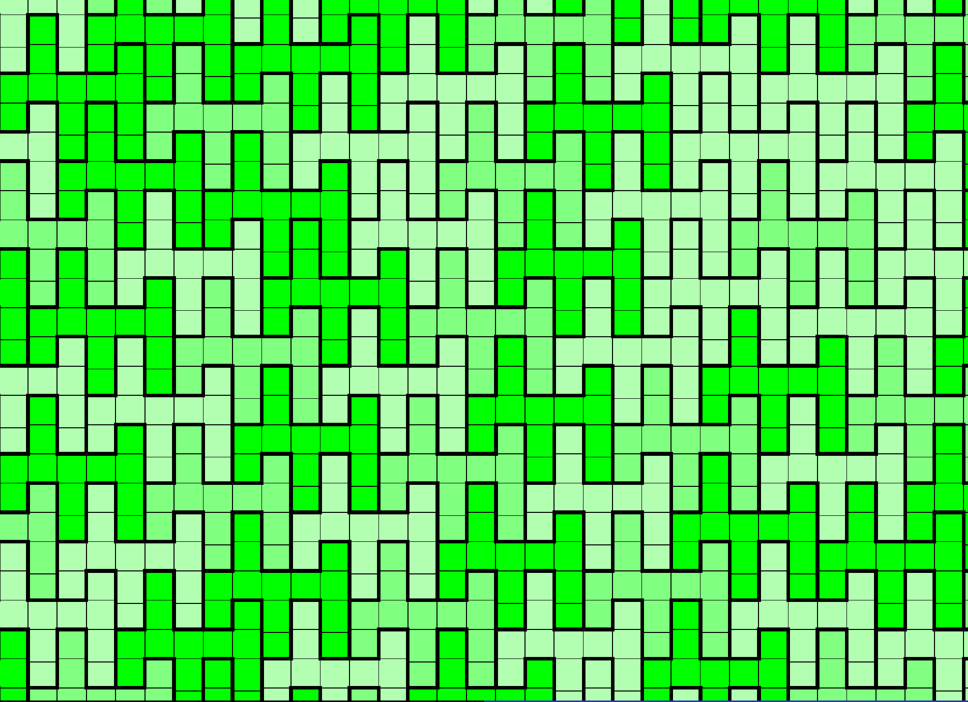


Exemple

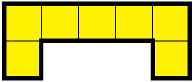


Exemple





Exemple



Pavages

Définition

Un polyomino P est dit *exact* s'il existe un pavage du plan par P.

Pavages

Définition

Un polyomino P est dit *exact* s'il existe un pavage du plan par P.

Question

Étant donné un mot $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ codant le bord du polyomino P, est-ce que P est exact ?

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\,0\,1\,0\,\bar{1}\,0\,1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\,0\,1\,0\,\bar{1}\,0\,1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\,0\,1\,0\,\bar{1}\,0\,1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \bar{\ } \circ \tilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

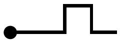
$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$

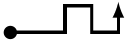


BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\;0\;1\;0\;\bar{1}\;0\;1$$

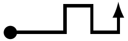


BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$



$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$

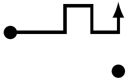
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



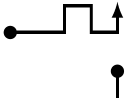
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \bar{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



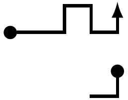
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



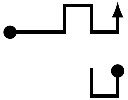
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



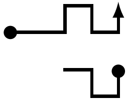
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



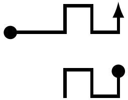
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



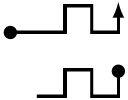
BN-Factorisation

Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$

$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$

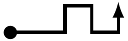


BN-Factorisation

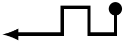
Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \overline{\ } \circ \widetilde{\ }$.

$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$



$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$

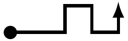


BN-Factorisation

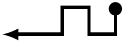
Définition

Soit $\widehat{\ }$ l'antimorphisme involutif définit par $\widehat{\ } = \bar{\ } \circ \tilde{\ }$.

$$u = 0\ 0\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 1$$



$$\widehat{u} = \bar{1}\ \bar{0}\ 1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{0}$$



Théorème (Beauquier et Nivat, 1991)

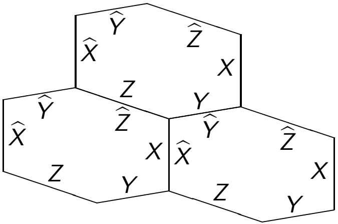
Un polyomino P est exact si et seulement s'il existe trois mots $X, Y, Z \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ tels que

$$X\ Y\ Z\ \widehat{X}\ \widehat{Y}\ \widehat{Z} \in b(P).$$

BN-Factorisation

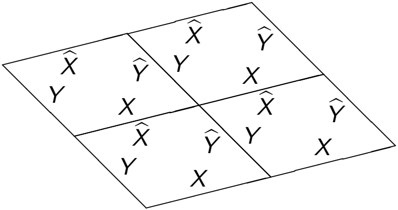
Pseudo-hexagone

$w \equiv XYZ\widehat{X}\widehat{Y}\widehat{Z}.$



Pseudo-carré

$w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}.$



Arbres des suffixes

Proposition

Étant donné une position i dans un mot u et une position j dans un mot v, la plus longue extension commune à partir de ces positions se calcule en temps constant après un prétraitement en $\mathcal{O}(|u| + |v|)$.

Arbres des suffixes

Proposition

Étant donné une position i dans un mot u et une position j dans un mot v, la plus longue extension commune à partir de ces positions se calcule en temps constant après un prétraitement en $\mathcal{O}(|u| + |v|)$.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & i & & & & & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
u = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1. \\
v = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0. & & \\
 & & & & \uparrow & & & & & & & & \\
 & & & & j & & & & & & & &
\end{array}$$

Arbres des suffixes

Proposition

Étant donné une position i dans un mot u et une position j dans un mot v, la plus longue extension commune à partir de ces positions se calcule en temps constant après un prétraitement en $\mathcal{O}(|u| + |v|)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & i & & & & & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
u = & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1. \\
v = & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 1 & 0 & 0. & & \\
 & & & & \uparrow & & & & & & & & \\
 & & & & j & & & & & & & &
\end{array}
$$

Détection des peudo-carrés

Théorème

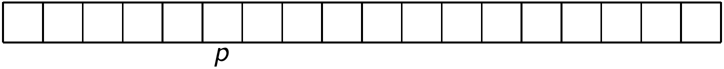
Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

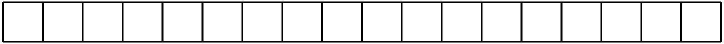
Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

$w \equiv$ 

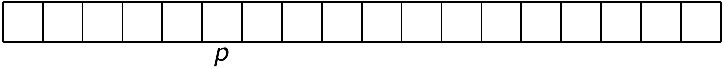
$\widehat{w} \equiv$ 

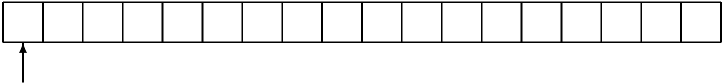
Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

$w \equiv$ 

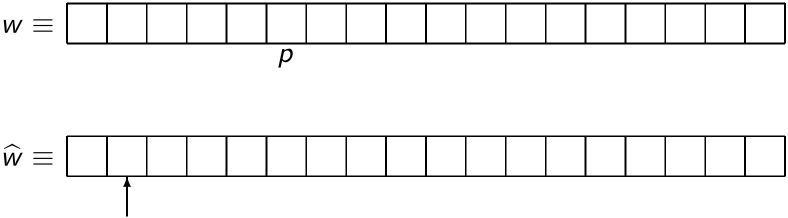
$\widehat{w} \equiv$ 

Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

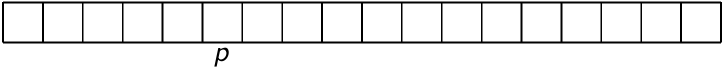


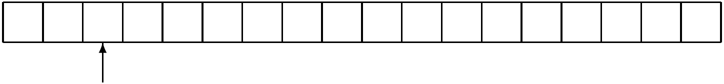
Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\,x\,\widehat{A}\,y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\,A\,\widehat{x}\,\widehat{A}$.

$w \equiv$ 

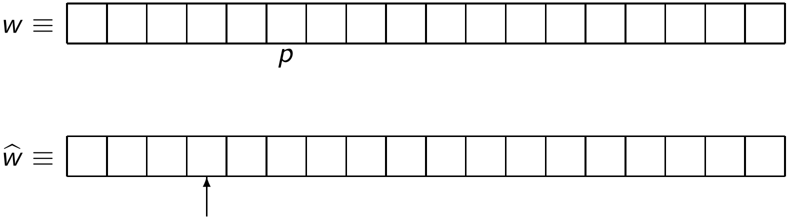
$\widehat{w} \equiv$ 

Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\ x\ \widehat{A}\ y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\ A\ \widehat{x}\ \widehat{A}$.

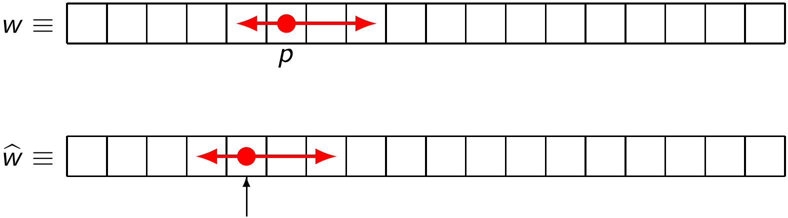


Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

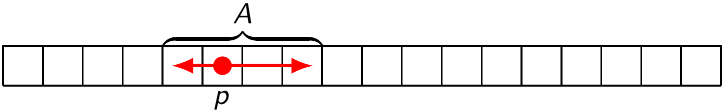


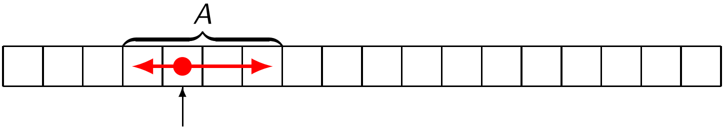
Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

$w \equiv$ 

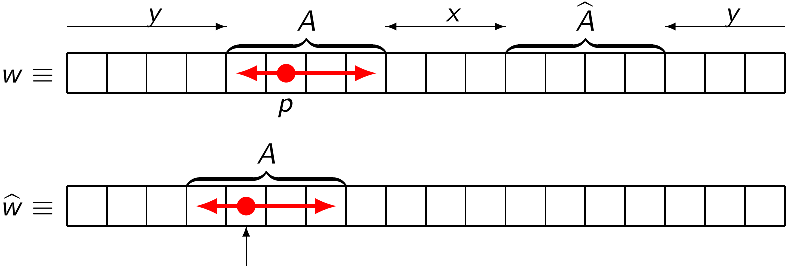
$\widehat{w} \equiv$ 

Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

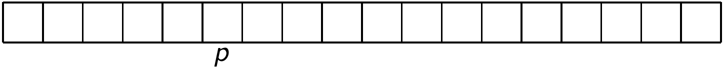


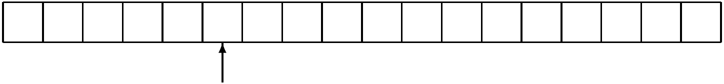
Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

$w \equiv$ 

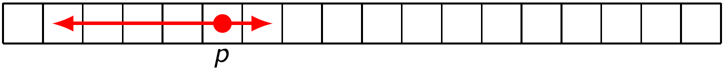
$\widehat{w} \equiv$ 

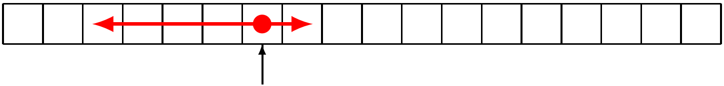
Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\,x\,\widehat{A}\,y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\,A\,\widehat{x}\,\widehat{A}$.

$w \equiv$ 

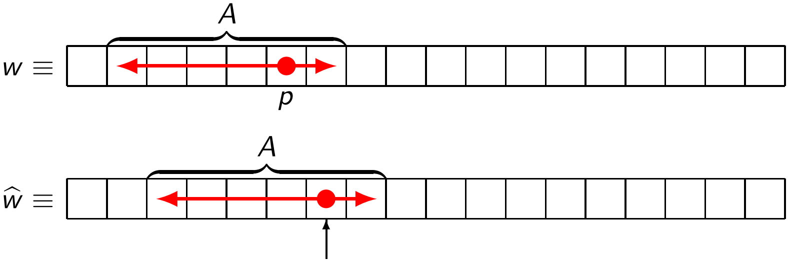
$\widehat{w} \equiv$ 

Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

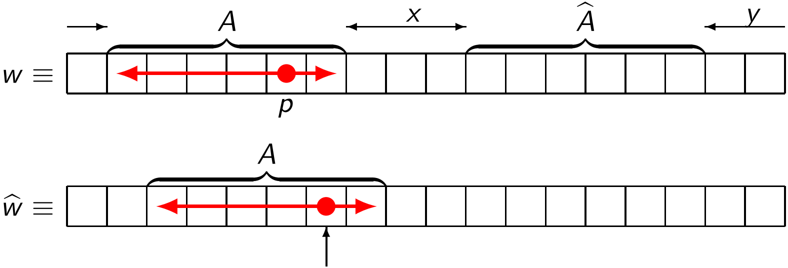


Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\, x\, \widehat{A}\, y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\, A\, \widehat{x}\, \widehat{A}$.

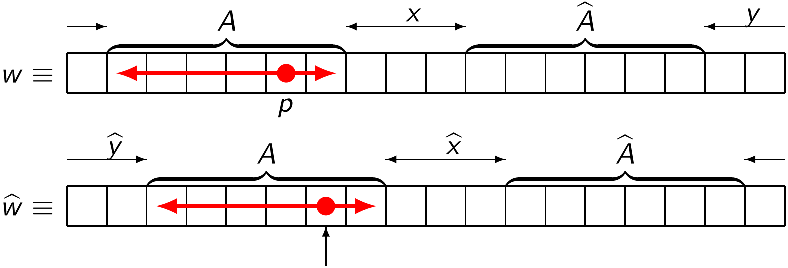


Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\,x\,\widehat{A}\,y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\,A\,\widehat{x}\,\widehat{A}$.

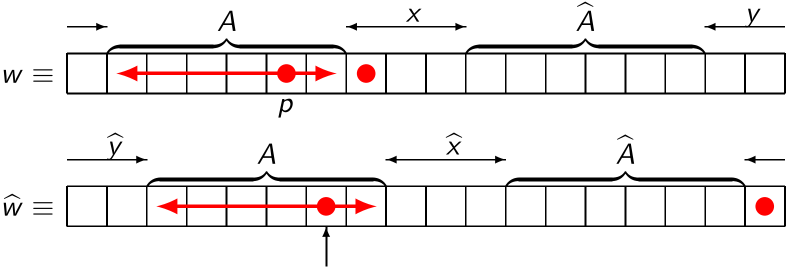


Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\,x\,\widehat{A}\,y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\,A\,\widehat{x}\,\widehat{A}$.

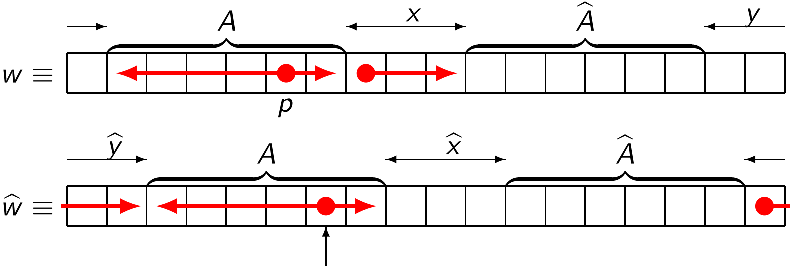


Détection des peudo-carrés

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0,1,\bar{0},\bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une factorisation de type pseudo-carré ($w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$) se calcule en temps linéaire en fonction de la taille de w.

Si $w \equiv A\,x\,\widehat{A}\,y$ alors $\widehat{w} \equiv \widehat{y}\,A\,\widehat{x}\,\widehat{A}$.



Détection des pseudo-hexagones

Définition

Un mot w est dit *sans-k-carrés*, pour $k \geq 2$ si pour tout facteur u de w on a que

$$u = xx \implies |u| < k.$$

Détection des pseudo-hexagones

Définition

Un mot w est dit *sans-k-carrés*, pour $k \geq 2$ si pour tout facteur u de w on a que

$$u = xx \implies |u| < k.$$

Théorème

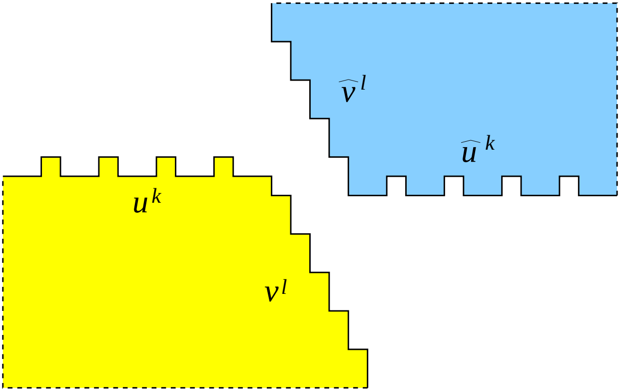
Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$ un mot sans-k-carrés avec $k \in \mathcal{O}(\sqrt{|w|})$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps linéaire.

Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.

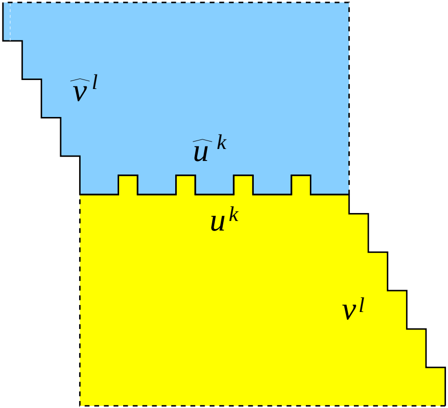
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



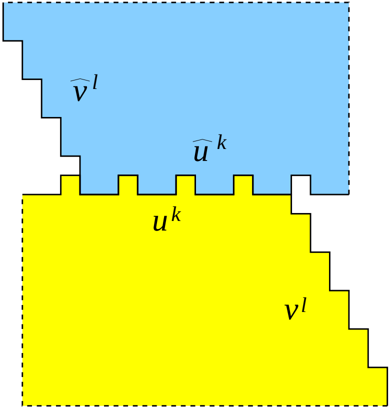
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



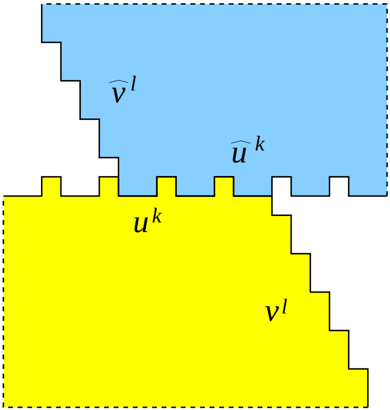
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



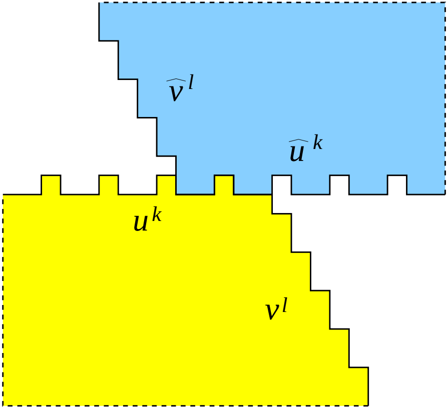
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



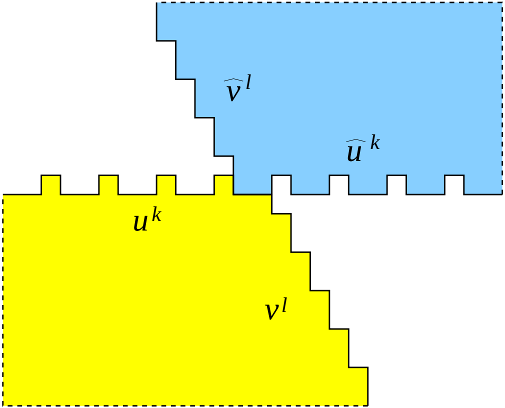
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



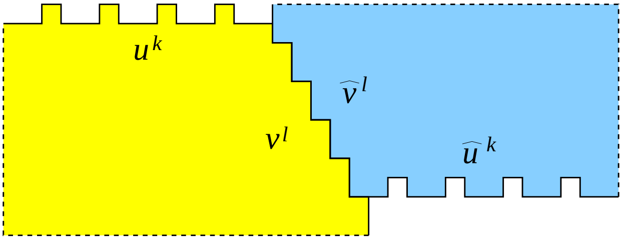
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



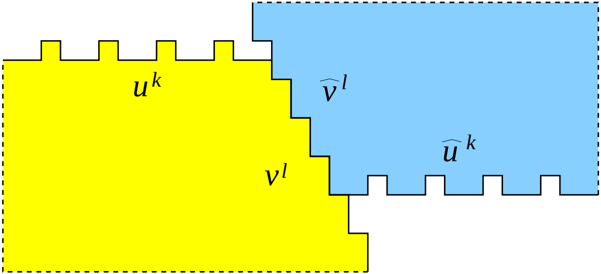
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



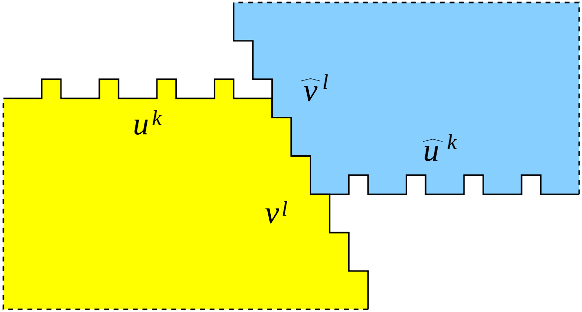
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



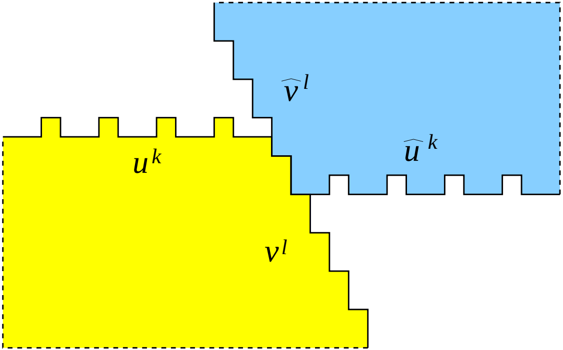
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



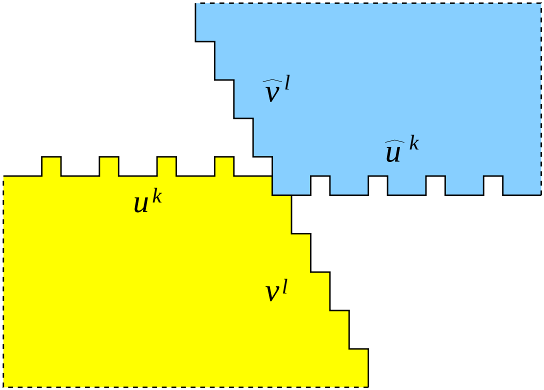
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



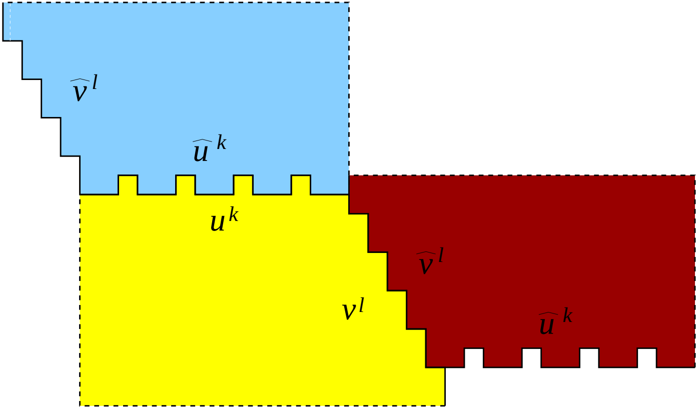
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. *Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps* $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



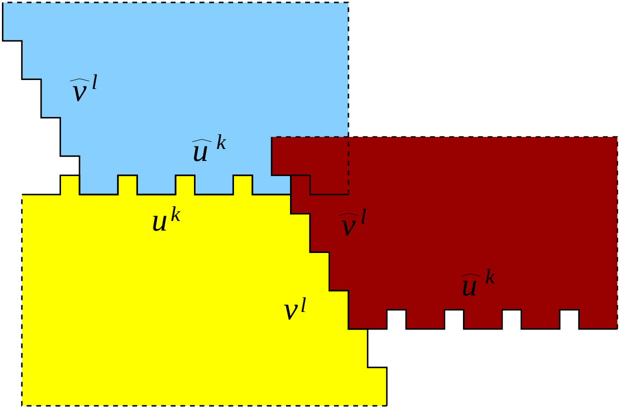
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



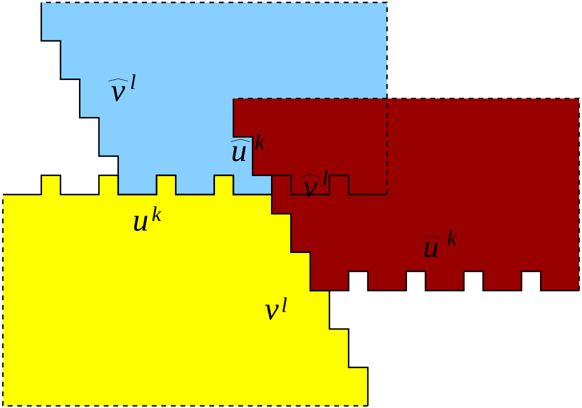
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



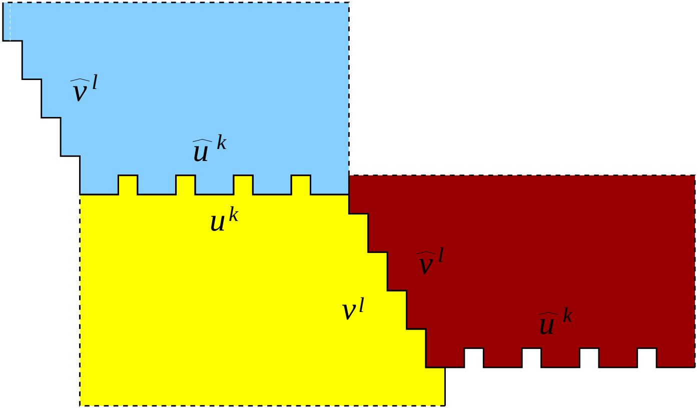
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. *Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps* $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



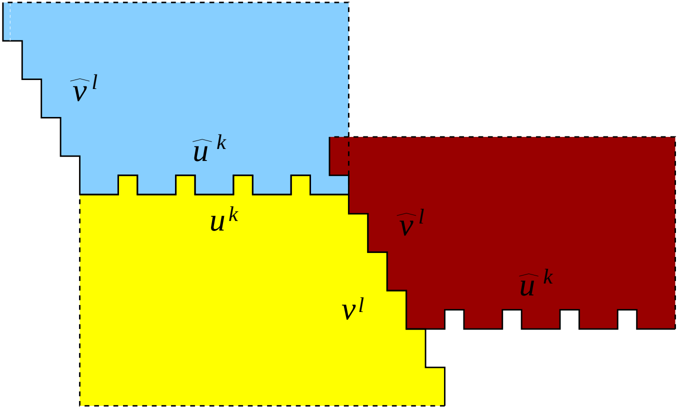
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



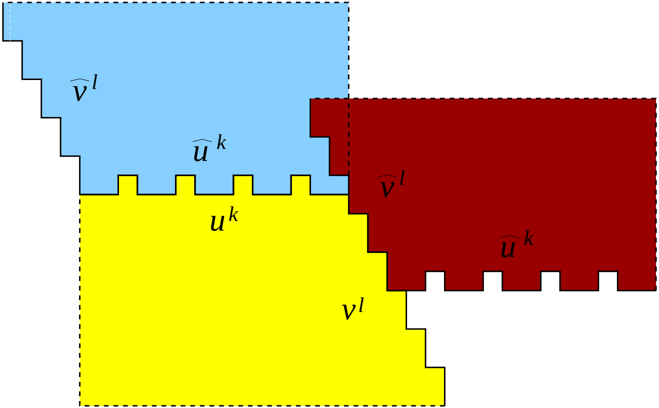
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0,1,\bar{0},\bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



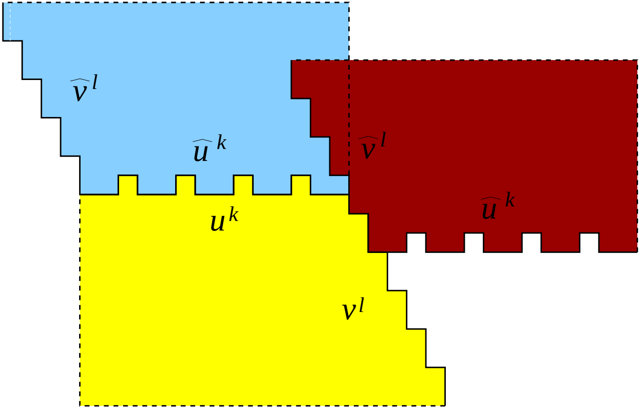
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



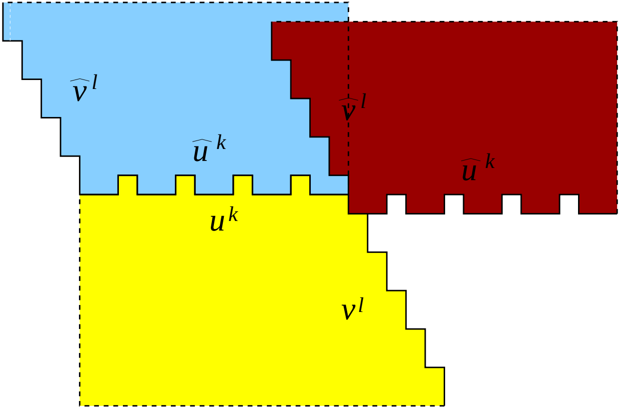
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



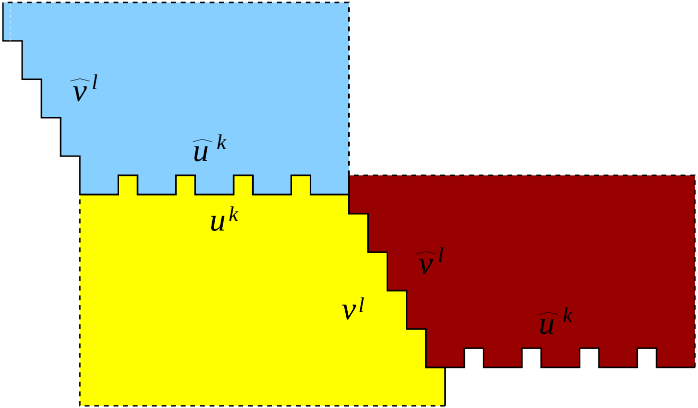
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



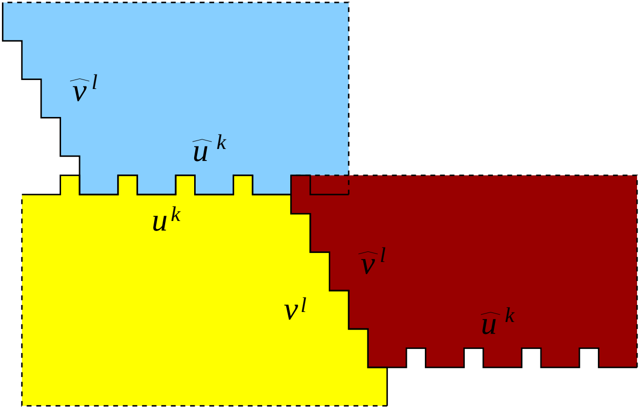
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



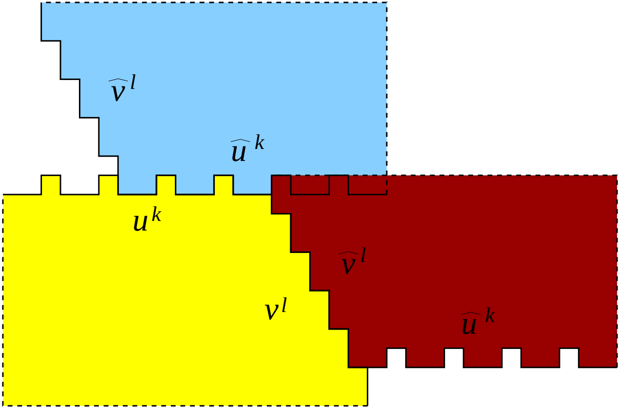
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



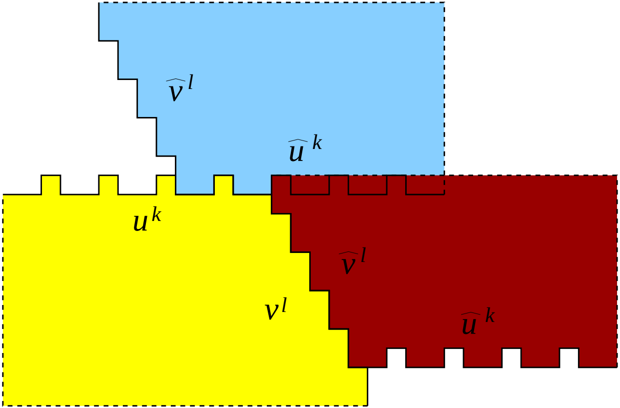
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



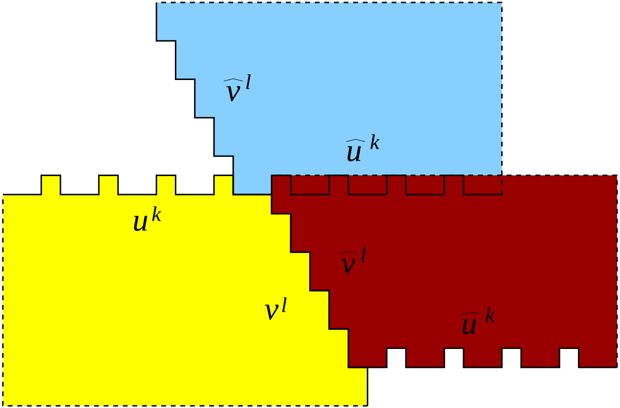
Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



Théorème

Soit P un polyomino codé par $w \in \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}^*$. Déterminer si w admet une BN-factorisation est décidable en temps $\mathcal{O}\left(n(\log n)^3\right)$.



MERRCI!